Contents

0.1 Introduction 4

1 Spineurs projetables et G-invariants **11**

1.1 Spineurs projetables 13

1.2 Spineurs G-invariants 17

1.3 Variétés quaternioniennes-Kähler 19

2 La première valeur propre... **23**

2.1 Introduction 27

2.2 Préliminaires 28

2.3 La construction de UM 30

2.4 Spineurs projetables 33

2.5 Spineurs de Killing 35

2.6 Démonstration du théorème principal 36

3 Kählerian Killing Spinors... **43**

3.1 Introduction 47

3.2 Previous results 48

3.3 The results 51

4 Spineurs et variétés de Hodge **55**

4.1 Préliminaires et notations 59

4.2 Les opérateurs D_+ et D_- 60

4.3 Variétés de Sasaki et variétés de Hodge 62
4.4 Spineurs projetables 65
4.5 Les relations entre les spectres 66
4.6 Remarques et applications 68

5 Sur les valeurs propres... 71
5.1 Structures 3-sasakiennes 75
5.2 Nouvelles valeurs propres de D 76

6 On Nearly Parallel G_2-Structures 81
6.1 Introduction 84
6.2 The exceptional group G_2. 85
6.3 Topological and Geometrical G_2-Reductions. 91
6.4 Nearly Parallel G_2-Structures... 97
6.5 New Examples 101
6.6 The Automorphism Group... 105
6.7 Nearly Parallel G_2-Structures with... 113

7 Formes harmoniques... 119
7.1 Introduction 123
7.2 Préliminaires algébriques 124
7.3 Le théorème principal 125
7.4 Conséquences 127

8 Structures de Weyl... 131
8.1 Introduction 135
8.2 Structures de Weyl 135
8.3 L'action d'une structure de Weyl sur le fibré des spineurs . . 136
8.4 Le cas $n \neq 4$ 137
8.5 Le cas $n = 4$ 140

8.6 Spineurs et structures complexes en dimension 4 141
8.7 Exemples noncompacts en dimension 4 144

9 On Kirchberg's inequality... 147
9.1 Introduction 150
9.2 Previous results 151
9.3 The eigenvalues of the Ricci tensor... 153
9.4 Further results 156

0.1 Introduction

Cette section a pour but de présenter les résultats contenus dans les neuf chapitres de ma thèse, et sans entrer dans les détails, j'espère qu'elle permettra à toute personne l'ayant parcourue de se faire une idée assez précise de mon travail.

Comme le titre l'indique, j'étudie ici des problèmes liés à l'opérateur de Dirac sur les variétés spinorielles. Ces problèmes se regroupent naturellement autour de deux directions de recherche pricipales : les spineurs projetables et leurs applications, dont il est question dans les chapitres 1, 2, 4 et 5, et l'étude des variétés admettant des spineurs speciaux (spineurs de Killing riemanniens ou kählériens, spineurs parallèles par rapport a des structures de Weyl), contenue dans les chapitres 3, 6, 7, 8 et 9, mais aussi dans les chapitres 2 et 5. Dans un premier temps je rappellerai les notions basiques de la géométrie spinorielle, pour ensuite donner une présentation succincte des différents chapitres.

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée. On dit que M est spinorielle si le fibré principal des repères orthonormés orientés sur M, $P_{\mathrm{SO}(n)}M$, admet un revêtement à deux feuillets $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ et une projection $\theta : P_{\mathrm{Spin}(n)}M \to P_{\mathrm{SO}(n)}M$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

i) Le fibré $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ est un fibré principal sur M, à groupe structurel $\mathrm{Spin}(n)$;

ii) Pour tout $x \in M$, θ définit un revêtement à deux feuillets de la fibre de $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ au-dessus de x sur la fibre de $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ au-dessus de x;

iii) Si on note par ϕ la projection canonique de $\mathrm{Spin}(n)$ sur $\mathrm{SO}(n)$, alors pour tout $\tilde{u} \in P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ et $\tilde{a} \in \mathrm{Spin}(n)$ on a

$$\theta(\tilde{u}\tilde{a}) = \theta(\tilde{u})\phi(\tilde{a}).$$

Une variété riemannienne M est spinorielle si et seulement si la deuxième classe de Stiefel-Whitney de M, $w_2(M)$, s'annule. Si c'est le cas, $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ s'appelle une structure spinorielle. Les structures spinorielles sont classifiées par $H^1(M, \mathbf{Z})$.

Soit $\Sigma M = P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\rho_n} \Sigma_n$ le fibré associé à la représentation spinorielle $\rho_n : \mathrm{Spin}(n) \to \Sigma_n$, muni d'un produit scalaire complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ défini par le produit hermitien canonique sur Σ_n. Les sections de ΣM seront appelées des champs spinoriels, ou, plus simplement, spineurs.

Considérons maintenant la représentation canonique de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathbf{R}^n$, qu'on étend d'une manière évidente à l'algèbre de Clifford complexe $\mathbf{C}l(n)$. On note par $\mathbf{C}l(M)$ le fibré associé à $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ via cette représentation. En particulier, TM est un sous-fibré de $\mathbf{C}l(M)$. Chaque fibre de $\mathbf{C}l(M)$ a une structure naturelle d'algèbre, ce qui induit une multiplication entre les sections de $\mathbf{C}l(M)$. On remarque que cette construction est valable pour toute variété riemannienne, sans supposer sa spinorialité.

Revenons maintenant au cadre spinoriel. On définit le produit de Clifford entre une section de $\mathbf{C}l(M)$ et un spineur, qu'on notera par $\cdot$ (un point au milieu de la ligne). Il provient d'une manière évidente de la représentation ρ_n de $\mathbf{C}l(n)$ sur Σ_n:

$$[u,\alpha]\cdot[\tilde{v},\varphi]=[\tilde{v},\rho_n(A(\alpha))(\varphi)],$$

où x est un point arbitraire de M, $u\in P_{\mathrm{SO}(n)}M_x$, $\tilde{v}\in P_{\mathrm{Spin}(n)}M_x$, $\varphi\in\Sigma_n$, $\alpha\in\mathbf{C}l(n)$, et A est l'unique élément de $\mathrm{SO}(n)$ tel que $u=\theta(\tilde{v})A$. Les conditions i)-iii) dans la définition de $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ montrent que cette définition est cohérente. En particulier, on peut parler du produit de Clifford entre un champ vectoriel et un spineur et de la contraction de Clifford qui lui est associée $\gamma : T^*M\otimes\Sigma M\rightarrow\Sigma M$, définie par $\gamma(X\otimes\psi)=X\cdot\psi$ sur les éléments décomposables. Soit ∇ la dérivée covariante sur TM de la connexion de Levi-Civita. On rappelle que la connexion de Levi-Civita sur $P_{\mathrm{SO}(n)}M$ induit une connexion sur $P_{\mathrm{Spin}(n)}M$, et donc une connexion linéaire sur ΣM, dont la dérivée covariante sera aussi notée par ∇.

On introduit maintenant l'opérateur de Dirac, $D:\Gamma(\Sigma M)\rightarrow\Gamma(\Sigma M)$, comme étant la composition

$$\Gamma(\Sigma M)\xrightarrow{\nabla}\Gamma(T^*M\oplus\Sigma M)\xrightarrow{\gamma}\Gamma(\Sigma M)$$

$D=\gamma\circ\nabla$. De manière explicite, si ψ est un champ spinoriel, $x\in M$ et $\{e_1,\cdots,e_n\}$ est un repère local orthonormé autour de x, on définit le champ spinoriel $D\psi$ par

$$(D\psi)_x=\sum_i e_i\cdot\nabla_{e_i}\psi,$$

Le fait que cette définition ne dépend pas du choix du repère orthonormé est trivial. L' opérateur différentiel D est elliptique, du premier ordre, auto-adjoint (dans le cas où M est compacte) par rapport à la métrique hermitienne sur $\Gamma(\Sigma M)$:

$$(\ ,\ )=\int_M\langle\ ,\ \rangle.$$

Un des outils principaux pour l'étude de cet opérateur est la formule de Lichnerowicz ci-dessous:

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{S}{4}, \tag{1}$$

où $\nabla^*\nabla$ est le laplacien de Hodge sur le fibré des spineurs et S est la courbure scalaire de M.

Après cette introduction voici une courte présentation des chapitres 1 - 9. A l'exception du premier chapitre, tous les autres ont fait l'objet d'un article ou d'une prépublication, soumis ou déjà parus dans différentes revues. Au début de chaque chapitre j'ai donné la situation exacte de l'article correspondant (paru, accepté pour publication, etc.) et une brève description des résultats obtenus. Les chapitres 3 et 6 correspondent à deux articles écrits en collaboration.

Chapitre 1. On définit ici, pour une G-fibration principale au-dessus d'une variété spinorielle, une structure spinorielle canonique sur l'espace total de la fibration et la notion de spineurs projetables sur cet espace. On déduit des formules entre les dérivées covariantes des spineurs sur la base et sur l'espace total, ainsi que pour les opérateurs de Dirac correspondants. Dans le cas où le groupe G est non-commutatif on propose ensuite une généralisation de la notion de spineurs projetables par la notion de spineurs G-invariants. On gagne ainsi l'invariance par rapport à l'opérateur de Dirac, mais, en échange, on y perd du fait qu'on ne peut plus faire la liaison de manière explicite avec les spineurs sur la base. Dans la troisième section on particularise ces notions au cas des variétés quaternioniennes Kähler et des fibrés 3-sasakiens correspondants.

Chapitre 2. On obtient ici un des résultats les plus importants de cette thèse : la classification (à l'aide des spineurs projetables) des variétés admettant des spineurs de Killing kählériens. On démontre que ces variétés sont nécessairement les espaces de twisteurs des variétés quaternioniennes Kähler à courbure scalaire positive en dimension $8l+6$, et des espaces projectifs complexes en dimension $8l+2$. L'idée de la démonstration est de construire un certain fibré en cercles au-dessus de notre variété, de mettre en évidence sur ce fibré une métrique riemannienne admettant un spineur de Killing (riemannien), et d'utiliser la classification de C. Bär de ces variétés. Pour quelques applications de ce résultat, voir les chapitres 3 et 7.

Chapitre 3. Dans cette note, écrite en collaboration avec U. Semmelmann, on utilise le résultat précédent et un théorème de K.-D. Kirchberg et U. Semmelmann pour obtenir un résultat très important en géométrie twistorielle : en dimension complexe $4l+3$, toute variété de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact est l'espace de twisteurs d'une variété quaternionienne Kähler à courbure scalaire positive. Ce résultat a été démontré indépendamment et aussi en dimension complexe $4l+1$ par C. LeBrun en 1994, avec des techniques complètement différentes, empruntant à la géométrie algébrique.

Chapitre 4. Dans la première partie de ce chapitre on considère une variété riemannienne compacte N admettant une structure de Sasaki régulière, et on démontre que le quotient M de N par l'action de S^1 correspondante, avec la métrique qui fait de la projection $N \to M$ une submersion riemannienne, est une variété de Hodge, c.à.d. une variété kählérienne compacte dont la classe de cohomologie de la forme de Kähler est un multiple réel d'une classe entière. Réciproquement, au-dessus de toute variété de Hodge M il existe un fibré en cercles N qui admet une métrique riemannienne et une structure de Sasaki régulière, tel que la projection $N \to M$ est une submersion riemannienne. Ensuite, dans la deuxième partie du chapitre, on utilise le formalisme des spineurs projetables pour déduire des relations entre les spectres des opérateurs de Dirac sur M et sur N, et on donne quelques applications de ces résultats.

Chapitre 5. Dans ce chapitre on trouve de nouvelles valeurs propres explicites de l'opérateur de Dirac sur les variétés 3-sasakiennes. L'idée fondamentale est la suivante : ne disposant pas d'informations algébriques sur les spineurs de Killing d'une variété M admettant un structure 3-sasakienne, on considère les spineurs parallèles projetables qu'ils induisent sur le cône au-dessus de M, et on utilise la théorie des représentations pour déduire des relations entre ces spineurs parallèles et la structure hyperkählérienne du cône. On interprète ensuite ces relations sur M et on les utilise pour mettre en évidence de nouveaux spineurs propres pour l'opérateur de Dirac. On finit par donner des estimations sur les multiplicités des valeurs propres correspondantes.

Chapitre 6. Il s'agit ici d'un article écrit en collaboration avec T.

Friedrich, U. Semmelmann et I. Kath. Après une première partie introductive et quelques rappels sur les G_2-structures presque parallèles, on fait une étude systématique de ces structures, surtout du point de vue de leurs automorphismes. On définit le *type* d'une G_2-structure et on s'intéresse plus particulièrement aux G_2-structures de type 1, appelées *propres*. On construit de nouveaux exemples (dont certains non-homogènes) de G_2-structures propres, en utilisant une modification de la métrique des variétés 3-sasakiennes de dimension 7. La fin de ce chapitre est consacrée à la classification des G_2-structures homogènes.

Chapitre 7. En 1984, O. Hijazi a montré que sur une variété spinorielle compacte de dimension n notée M, le produit de Clifford entre une forme harmonique de degré $k \neq 0, n$ et un spineur de Killing est nul. Ce résultat n'est plus valable dans le cas des spineurs de Killing kählériens, car le produit de Clifford entre la forme de Kähler de M et un tel spineur est non-nul. On peut cependant éviter cette difficulté en conjecturant l'annulation du produit de Clifford entre les formes harmoniques *effectives* et les spineurs de Killing kählériens, car la forme de Kähler joue un rôle très particulier parmi les formes harmoniques. La réponse affirmative à cette conjecture "réduite" et quelques unes de ses conséquences forment les résultats principaux de ce chapitre.

Chapitre 8. Soit (M^n, g), $n \geq 3$, une variété spinorielle simplement connexe. On considère ici le problème de l'existence des spineurs parallèles par rapport à une structure de Weyl quelconque D sur M qui est, évidemment, une généralisation du problème de l'existence des spineurs parallèles car la connexion de Levi-Civita est un cas particulier de structure de Weyl. Ce problème est invariant par transformations conformes de la métrique: tout spineur Ψ sur (M, g), parallèle par rapport à D, induit un spineur $\bar{\Psi}$ sur $(M, \bar{g})$, parallèle par rapport à D. Si D est exacte, alors D est la connexion de Levi-Civita d'une métrique $\bar{g}$ de la classe conforme de g, donc il existe une solution (Ψ, D) avec D exacte si et seulement si (M, g) est conformément équivalente à une des variétés décrites ci-dessus. On s'intéresse, par conséquent, aux solutions non-triviales du problème, c.à.d. aux paires (Ψ, D) avec Ψ parallèle par rapport à D et D non-fermée. Le but de ce chapitre est de montrer qu'il n'y a pas de solution non-triviale si $n \neq 4$ ou si $n = 4$ et M compacte, et de construire des exemples de solutions non-triviales sur des variétés non-compactes de dimension 4.

Chapitre 9. En 1986 K.-D. Kirchberg a montré que toute valeur propre de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne compacte (M^{2m}, g) de dimension complexe paire satisfait l'inégalité $\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} \inf_M S$, où S est la courbure scalaire. Il est conjecturé que les variétés pour lesquelles le cas d'égalité est atteint sont des produits $T^2 \times N$, où T^2 est un tore plat et N est l'espace de twisteurs d'une variété quaternionienne Kähler à courbure scalaire positive. Une solution partielle à cette conjecture a été donnée par A. Lichnerowicz en 1990, en supposant de plus que le tenseur de Ricci est parallèle. On démontre dans ce chapitre que le tenseur de Ricci d'une variété-limite a deux valeurs propres, $S/(n-2)$ et 0, la première avec la multiplicité $n-2$ et la seconde avec la multiplicité 2, et on confirme la conjecture ci-dessus dans certains cas particuliers.

Chapter 1

Spineurs projetables et G-invariants

Résumé. – Dans ce chapitre on définit les spineurs projetables, qui seront utilisés de manière fondamentale dans la première moitié de la thèse.

Abstract. – In this chapter we define the notion of projectable spinors, which will be the basic notion in the first half of this thesis.

1.1 Spineurs projetables

Soit M^n une variété spinorielle compacte et $\pi : E^{n+k} \to M^n$ une fibration principale au-dessus de M de groupe structural compact G.

Lemme 1.1.1 *La donnée d'une métrique bi-invariante sur G et d'une connexion sur E induit canoniquement une métrique sur E telle que la projection sur M soit une submersion riemennienne à fibres totalement géodésiques.*

Preuve. On considère la décomposition en somme directe $TE = T^V E \oplus T^H E$ donnée par la connexion, on met sur $T^V E$ la métrique de G, sur $T^H E$ l'image réciproque de la métrique de M, et on décrète ces deux espaces orthogonaux. L'annulation du tenseur T (cf. [50]) est équivalente au fait que $\nabla_V W$ soit un vecteur vertical pour tous vecteurs verticaux fondamentaux V, W. Soit α la forme de connexion et F la forme de courbure sur E. Alors, pour tout champ horizontal X^*, induit par un champ X sur M, on a

$$0 = F(V, X^*) = d\alpha(V, X^*) = -\frac{1}{2}\,\alpha([V, X^*]),$$

donc $[V, X^*]$ est un champ horizontal. En même temps, V est projetable sur 0 et X^* sur X, donc $[V, X^*]$ est projetable sur 0, c'est-à-dire il est vertical. On a montré que

$$[V, X^*] = 0. \tag{1.1}$$

La formule de Koszul, le fait que $g(V, W)$ est constant et que $[V, W]$ est vertical, montrent que $g(W, \nabla_{X^*} V) = 0$. Il en résulte que

$$0 = g(W, \nabla_V X^*) = -g(\nabla_V W, X^*),$$

et donc $\nabla_V W$ est vertical, ce qui montre que la submersion π est à fibres totalement géodésiques. †

Le fibré tangent d'un groupe de Lie est canoniquement trivialisé par les champs invariants à gauche, ce qui nous donne une structure spinorielle canonique sur G. De la même manière, le fibré $T^V E$ est canoniquement spinoriel, ce qui montre que si M est spinorielle, E l'est aussi: la deuxième classe de Stiefel-Whitney de $T^H E$ est l'image réciproque de $w_2(M)$ par π.

Dans la suite on suppose que M est une variété spinorielle de dimension paire, avec une structure spinorielle fixée $P_{\mathrm{Spin}(n)} M$, et on regarde en détail la structure induite sur E. Pour tout m, on considère la représentation spinorielle $\rho_m : \mathrm{Spin}(m) \to End(\Sigma^m)$, le revêtement universel $\tau_m : \mathrm{Spin}(m) \to \mathrm{SO}(m)$, l'inclusion canonique $i : \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(k) \to \mathrm{SO}(n+k)$, et le groupe $\mathrm{Spin}(n,k) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathrm{Spin}(k)$, regardé comme sous-groupe de $\mathrm{Spin}(n+k)$. Remarquons que la restriction $\tau_{n,k}$ de τ_{n+k} à $\mathrm{Spin}(n,k)$ est un revêtement à deux feuillets de $\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(k)$.

Les fibrés principaux des repères horizontaux et verticaux de E, $P_{\mathrm{SO}(n)}E$ et $P_{\mathrm{SO}(k)}E$ admettent des structures spin canoniques $P_{\mathrm{Spin}(n)}E = \pi^* P_{\mathrm{Spin}(n)}M$ et $P_{\mathrm{Spin}(k)}E = E \times \mathrm{Spin}(k)$, qui induisent une $\mathrm{Spin}(n,k)$-structure sur E:

$$P_{\mathrm{Spin}(n,k)}E = P_{\mathrm{Spin}(n)}E \times_{\mathbf{Z}_2} P_{\mathrm{Spin}(k)}E,$$

et par conséquent une structure spinorielle

$$P_{\mathrm{Spin}(n+k)}E = P_{\mathrm{Spin}(n,k)}E \times_{\mathrm{Spin}(n,k)} \mathrm{Spin}(n+k).$$

D'autre part, les algèbres de Clifford complexes $\mathbf{C}l(m)$ sont $\mathbf{Z}_2$-graduées, et pour tous p, q, $\mathbf{C}l(p+q)$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel gradué $\mathbf{C}l(p) \,\hat{\otimes}\, \mathbf{C}l(q)$. Pour n pair, Σ^n est un $\mathbf{C}l(n)$-module $\mathbf{Z}_2$-gradué, et $\Sigma^n \otimes \Sigma^k$ devient un $\mathbf{C}l(p) \,\hat{\otimes}\, \mathbf{C}l(q)$-module par rapport à la multiplication

$$(a \,\hat{\otimes}\, b) \cdot (\psi \otimes \phi) = (-1)^{deg(b)deg(\psi)} (a \cdot \psi) \otimes (b \cdot \phi).$$

En comparant les dimensions, on en déduit que $\Sigma^{n+k} = \Sigma^n \otimes \Sigma^k$, et donc le fibré des spineurs sur E peut s'écrire

$$\begin{aligned} \Sigma^{n+k}E &= P_{\mathrm{Spin}(n+k)}E \times_{\rho_{n+k}} \Sigma^{n+k} = P_{\mathrm{Spin}(n,k)}E \times_{\rho_{n,k}} \Sigma^{n+k} \\ &= P_{\mathrm{Spin}(n,k)}E \times_{\rho_{n,k}} \Sigma^n \otimes \Sigma^k \\ &= (\pi^* P_{\mathrm{Spin}(n)}M \times_{\mathbf{Z}_2} P_{\mathrm{Spin}(k)}E) \times_{\rho_{n,k}} \Sigma^n \otimes \Sigma^k \\ &= \pi^* \Sigma^n M \otimes \Sigma^k E, \end{aligned}$$

où $\Sigma^k E$ est le fibré trivial $E \times \Sigma^k$. Un spineur sur G s'appelle *constant* si dans la trivialisation donnée par les champs invariants à gauche, il s'exprime comme une fonction constante de G dans Σ^k. On note l'espace des spineurs constants sur G par $\Sigma^k_c G \sim \Sigma^k$. On a évidemment $\Gamma(\Sigma^k G) = \Sigma^k_c G \otimes C^\infty(G)$, et par la discussion précédente, $\Gamma(\Sigma^{n+k}E) = \Gamma(\Sigma^n M) \otimes \Sigma^k_c G \otimes_{C^\infty(M)} C^\infty(E)$.

Définition 1.1.1 *Un spineur sur E s'appelle projetable s'il se trouve dans le sous-espace $\Gamma(\Sigma^n M) \otimes \Sigma^k_c G$ de $\Gamma(\Sigma^{n+k}E)$.*

Un couple $(\psi, \alpha) \in \Gamma(\Sigma^n M) \times \Sigma_c^k G$ induit un spineur projetable sur E, noté $\psi \otimes \alpha$. La multiplication de Clifford est donnée par

$$X^* \cdot (\psi \otimes \alpha) = (X \cdot \psi) \otimes \alpha \quad \text{et} \quad V \cdot (\psi \otimes \alpha) = \overline{\psi} \otimes (V \cdot \alpha),$$

où X^* est le relevé horizontal du champ de vecteurs X sur M, V est un champ vertical fondamental correspondant au champ invariant à gauche, noté aussi V, sur G, et $\overline{\psi}$ est le conjugué de ψ par rapport à la $\mathbf{Z}_2$-graduation.

Soient ∇ et $\tilde{\nabla}$ les dérivées covariantes de M, respectivement E, étendues aux fibrés des spineurs, D et $\tilde{D}$ les opérateurs de Dirac de M et E, et $\gamma_{a,b}^c$ les constantes de structure de G. On fixe désormais un repère orthonormé global $\{V_1, ..., V_k\}$ des champs invariants à gauche, identifiés aux champs verticaux fondamentaux induits sur E, et un repère orthonormé local $\{X_1, ..., X_n\}$ sur M.

Théorème 1.1.1 *Considérons une paire $(\psi, \alpha) \in \Gamma(\Sigma^n M) \times \Sigma_c^k G$. Les relations entre les dérivées covariantes et les opérateurs de Dirac sur E et M sont les suivantes:*

1. $$\tilde{\nabla}_{X^*}(\psi \otimes \alpha) = (\nabla_X \psi) \otimes \alpha + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^* \cdot A_{X^*} X_i^* \cdot (\psi \otimes \alpha), \ \forall X \in TM;$$

2. $$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V(\psi \otimes \alpha) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \langle A_{X_i^*} V, X_j^* \rangle (X_i \cdot X_j \cdot \psi) \otimes \alpha \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{a,b,c=1}^k \gamma_{a,b}^c \langle V, V_c \rangle \, \psi \otimes (V_a \cdot V_b \cdot \alpha), \ \forall V \in T^V E; \end{aligned}$$

3. $$\tilde{D}(\psi \otimes \alpha) = (D\psi) \otimes \alpha + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n A_{X_i^*} X_j^* \, (X_i \cdot X_j \cdot \psi) \otimes \alpha + \overline{\psi} \otimes D\alpha.$$

Preuve. 1. Les sections $s = (X_1, ..., X_n)$ et $s_0 = (V_1, ..., V_k)$ de $P_{\mathrm{SO}(n)} M$, respectivement $P_{\mathrm{SO}(k)}(G)$, donnent une section locale $\sigma = (s, s_0)$ de $P_{\mathrm{SO}(n+k)}(E)$, qui induit une section $\tilde{s}$ de $P_{\mathrm{Spin}(n+k)}(E)$. Si le spineur ψ s'écrit localement $\psi = [s, \phi]$, où $\phi : U \subset M \to \Sigma_n$, alors $\psi \otimes \alpha = [\tilde{s}, \xi]$, où $\xi = \phi \circ \pi \otimes \alpha$, et en utilisant le fait que $\tilde{\nabla}_X^* V_a = \tilde{\nabla}_{V_a} X^*$ est un vecteur horizontal pour tout a, on déduit

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^*}(\psi \otimes \alpha) &= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_{X^*} X_j^*, X_k^* \rangle \cdot (\psi \otimes \alpha) + [\tilde{s}, X^*(\xi)] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{j,a} X_j^* \cdot V_a \langle \tilde{\nabla}_{X^*} X_j^*, V_a \rangle \cdot (\psi \otimes \alpha) \\
&= \left(\frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot \psi\right) \otimes \alpha + [s, X(\phi)] \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_i X_i^* \cdot A_{X^*} X_i^* \cdot (\psi \otimes \alpha) \\
&= (\nabla_X \psi) \otimes \alpha + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^* \cdot A_{X^*} X_i^* \cdot \psi \otimes \alpha.
\end{aligned}$$

2. La deuxième partie de la proposition se démontre de la même manière:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_V(\psi \otimes \alpha) &= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, X_k^* \rangle \cdot (\psi \otimes \alpha) + [\tilde{s}, V(\xi)] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{a<b} V_a \cdot V_b \langle \tilde{\nabla}_V V_a, V_b \rangle \cdot (\psi \otimes \alpha) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j<k} \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, X_k^* \rangle \, (X_j \cdot X_k \cdot \psi) \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{4}\sum_{a<b} V_a \cdot V_b \langle [V_a, V_b], V \rangle \cdot (\psi \otimes \alpha) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \langle A_{X_i^*} V, X_j^* \rangle (X_i \cdot X_j \cdot \psi) \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{8}\sum_{a,b,c=1}^{k} \gamma_{a,b}^c \langle V, V_c \rangle \, \psi \otimes (V_a \cdot V_b \cdot \alpha).
\end{aligned}$$

3. Résulte de 1. et 2. par sommation. †

Corollaire 1.1.1 *Un spineur Ψ sur E est projetable si et seulement si pour tout $V \in T^V E$*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_V(\Psi) &= \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \langle A_{X_i^*} V, X_j^* \rangle \, X_i^* \cdot X_j^* \cdot \Psi \\
&+ \frac{1}{8}\sum_{a,b,c=1}^{k} \gamma_{a,b}^c \langle V, V_c \rangle \, V_a \cdot V_b \cdot \Psi.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 *Le spineur $\tilde{D}\Psi$ est projetable pour tout Ψ projetable si et seulement si G est un tore.*

Preuve. En effet, dans la formule pour $\tilde{D}(\psi \otimes \alpha)$, le premier terme et le troisième terme sont projetables, tandis que le deuxième peut s'écrire

$$\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{n} \langle \tilde{\nabla}_{X_i^*} X_j^*, V_a \rangle \, (X_i \cdot X_j \cdot \bar{\psi}) \otimes (V_a \cdot \alpha).$$

Le corollaire précédent montre qu'un spineur de la forme $\sum f_i \Psi_i$ avec Ψ_i projetables et linéairement indépendants est projetable si et seulement si les fonctions f_i sont constantes sur les fibres. Dans notre cas, les fonctions $f_{i,j,a} = \langle \tilde{\nabla}_{X_i^*} X_j^*, V_a \rangle$ sont constantes sur les fibres si et seulement si $V_b f_{i,j,a} = 0$, pour tous i, j, a, b. Compte tenu du fait que V_b est un champ de vecteurs de Killing et que $L_{V_b} X_i^* = L_{V_b} X_j^* = 0$, on a $V_b f_{i,j,a} = \sum_c \gamma_{b,a}^c f_{i,j,c}$, donc finalement $\tilde{D}(\psi \otimes \alpha)$ est projetable si et seulement si les constantes de structure de G s'annulent.†

1.2 Spineurs G-invariants

La fin de la section précédente montre que si G est non-commutatif, l'espace des spineurs projetables n'est pas $\tilde{D}$-invariant. Le but de cette section est de construire une extension $\tilde{D}$-invariante de cet espace.

Définition 1.2.1 *Une section $T \in \Gamma(\mathbf{C}l(E))$ du fibré en algèbres de Clifford de E s'appelle G-invariante si les dérivées de Lie de T par rapport aux champs verticaux fondamentaux V_a s'annulent. L'ensemble des sections G-invariantes de $\mathbf{C}l(E)$ est noté par $\Gamma_G(\mathbf{C}l(E))$.*

Le fait que $\pi^*\Gamma(\mathbf{C}l(M)) \subset \Gamma_G(\mathbf{C}l(E))$ permet la construction suivante:

Définition 1.2.2 *Un spineur sur E s'appelle G-invariant s'il appartient au sous-espace $\Gamma_G(\Sigma^{n+k}(E)) = \Gamma_G(\mathbf{C}l(E)) \otimes_{\pi^*\gamma(\mathbf{C}l(M))} \pi^*\Gamma(\Sigma^n M) \otimes \Sigma_c^k G$ de $\Gamma(\Sigma^{n+k} E)$.*

C'est cette construction qui réalise l'espace invariant souhaité:

Théorème 1.2.1 *L'espace $\Gamma_G(\Sigma^{n+k}(E))$ est invariant par $\tilde{D}$.*

Preuve. Considérons un spineur décomposable de $\Gamma_G(\Sigma^{n+k}(E))$ de la forme $\Psi = T \cdot (\psi \otimes \alpha)$. On va montrer que les parties "horizontale" et "verticale" de $\tilde{D}\Psi$ se trouvent chacune dans $\Gamma_G(\Sigma^{n+k}(E))$.

La première formule du théorème 1.1.1 et le fait que $A_{X_i^*}X_j^*$ sont des champs G-invariants, ainsi que $\tilde{\nabla}_{X_i^*}T$, montrent que $\tilde{\nabla}_{X_i^*}\Psi \in \Sigma_G(E)$. Par conséquent, $\sum_i X_i^* \cdot \tilde{\nabla}_{X_i^*}\Psi \in \Gamma_G(\Sigma^{n+k}(E))$.

La partie intéressante de la démonstration est de montrer que la partie "verticale" de $\tilde{D}\Psi$ est aussi G-invariante. Dans les calculs qui suivent on applique la convention de sommation sur les indices qui apparaissent deux fois, pour alléger les notations. On va utiliser les deux formules suivantes reliant les constantes de structure :

$$\gamma_{a,b}^c = -\gamma_{b,a}^c = -\gamma_{a,c}^b,$$

et

$$\gamma_{a,e}^c\gamma_{d,e}^b + \gamma_{e,b}^c\gamma_{d,e}^a + \gamma_{d,e}^c\gamma_{a,b}^e = 0.$$

La deuxième formule représente, bien entendu, l'identité de Lie. On peut maintenant calculer:

$$\begin{aligned}
V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}\Psi &= (V_a\tilde{\nabla}_{V_a}T) \cdot (\psi \otimes \alpha) + V_a \cdot T \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}(\psi \otimes \alpha) \\
&= (V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T) \cdot (\psi \otimes \alpha) + \frac{1}{4} V_a \cdot T \cdot \langle A_{X_i^*}V_a, X_j^*\rangle(X_i \cdot X_j \cdot \psi) \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{8} V_a \cdot T \cdot \gamma_{d,b}^c \langle V_a, V_c\rangle \,\psi \otimes (V_d \cdot V_b \cdot \alpha) \\
&= (V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T) \cdot (\psi \otimes \alpha) - \frac{1}{4} A_{X_i^*}X_j^* \cdot T \cdot (X_i \cdot X_j \cdot \psi) \otimes \alpha \\
&\quad + \frac{1}{8} \gamma_{d,b}^c \, V_c \cdot T \cdot V_d \cdot V_b \cdot (\psi \otimes \alpha).
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est manifestement G-invariant. Il reste à vérifier que les deux sections de $\mathbf{C}l(E)$, $(V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T)$ et $(\gamma_{d,a}^c \, V_c \cdot T \cdot V_a \cdot V_b)$ sont G-invariantes. En effet,

$$\begin{aligned}
L_{V_b}(V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T) &= (L_{V_b}V_a) \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T + V_a \cdot \tilde{\nabla}_{L_{V_b}V_a}T \\
&= \gamma_{b,a}^c \, V_c \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T + \gamma_{b,a}^c \, V_a \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T \\
&= (\gamma_{b,a}^c + \gamma_{b,c}^a) \, V_c \cdot \tilde{\nabla}_{V_a}T = 0,
\end{aligned}$$

et, similairement,

$$L_{V_d}(\gamma_{a,b}^c \, V_c \cdot T \cdot V_a \cdot V_b) = \gamma_{a,b}^c \, (\gamma_{d,c}^e \, V_e \cdot T \cdot V_a \cdot V_b + \gamma_{d,a}^e \, V_c \cdot T \cdot V_e \cdot V_b$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma^e_{d,b}\, V_c \cdot T \cdot V_a \cdot V_e) \\
= \quad & (\gamma^c_{a,e}\gamma^b_{d,e} + \gamma^c_{e,b}\gamma^a_{d,e} + \gamma^c_{d,e}\gamma^e_{a,b})\, V_c \cdot T \cdot V_a \cdot V_b = 0.\dagger
\end{aligned}
$$

1.3 Variétés quaternioniennes-Kähler

On se tourne maintenant vers le cas particulier où M est une variété spinorielle quaternionienne-Kähler et E le $SO(3)$-fibré principal au-dessus de M admettant une 3-structure de Sasaki. En particulier, si M n'est pas l'espace hyperbolique quaternionien, sa dimension doit être un multiple entier de 8, à cause de la spinorialité (cf. [53]).

Pour alléger les notations, on va utiliser le même symbole pour les dérivées covariantes sur M et sur E, ainsi que leur prolongement aux fibrés des spineurs. Considérons une base canonique $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $so(3)$, induisant les champs verticaux fondamentaux sur E, $\{V_1, V_2, V_3\}$, qui définissent une 3-structure de Sasaki sur E. Considérons les tenseurs $J_\alpha = -\nabla V_\alpha$.

La structure de variété quaternionienne-Kähler sur M se retrouve à partir de la structure de 3-Sasaki sur E de la manière suivante: pour chaque point x de M, on choisit une section locale s de E et on définit localement $I_\alpha(X_y) = \pi_*(J_\alpha(s_*(X_y))) = \pi_*(J_\alpha(X^*_{s(y)}))$. La vérification du fait que les sections locales de $End(TM)$ ainsi définies satisfont les relations quaternioniennes et qu'elles engendrent un sous-fibré parallèle de rang 3 de $End(TM)$ est une conséquence directe des relations satisfaites par une structure 3-sasakienne.

Faisons maintenant un point sur les notations: α, β, γ seront toujours des éléments de $\{1, 2, 3\}$, $\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma}$ sera la signature de la permutation $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de $\{1, 2, 3\}$ et 0 si $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ n'est pas une permutation. On va aussi fixer un point $x \in M$, un repère local orthonormé $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avec $(\nabla\, e_i)_x = 0$, et son relèvement horizontal à E, noté aussi $\{e_1, \ldots, e_n\}$, par abus de notation. On introduit les 2-formes $\Omega_\alpha = \frac{1}{2} e_i \wedge J_\alpha(e_i)$ et les opérateurs de Dirac tordus $D_\alpha = J_\alpha(e_i) \cdot \nabla_{e_i}$, dans un repère local orthonormé $\{e_i\}$. L'apparition du même indice dans une formule indique une sommation.

Tous les calculs qu'on va faire seront valables en x, mais la forme tensorielle des résultats indiquera qu'ils seront vrais sur E. Avant de passer aux spineurs, voici quelques formules dont on va se servir fréquemment

$$
\nabla_{V_\alpha} V_\beta = \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma \quad , \quad J_\alpha(V_\beta) = \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma \quad , \quad X \cdot \Omega_\alpha = \Omega_\alpha \cdot X - 2J_\alpha(X),
$$

$$(\nabla_X J_\alpha)(Y) = \langle X, Y\rangle V_\alpha - \langle V_\alpha, Y\rangle X \ , \ \forall X, Y \in TE,$$
$$\nabla_{e_j}(J_\alpha(e_i)) = \delta_{ij} V_\alpha - \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma \langle J_\beta(e_i), e_j\rangle,$$
$$\nabla_{V_\beta}(J_\alpha(e_i)) = -\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma(e_i) + \delta_{\alpha\beta} e_i,$$
$$\nabla_{e_j}\Omega_\alpha = e_j \cdot V_\alpha + \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} J_\beta(e_j)\cdot V_\gamma \quad , \quad \nabla_{V_\beta}\Omega_\alpha = 0.$$

Considérons maintenant la structure spinorielle sur M ainsi que la structure spinorielle sur E qu'elle induit. On a vu qu'à un spineur φ sur M et à un élément ξ de Σ^3 on peut associer un spineur projetable $\varphi\otimes\xi$ sur E. Quitte à changer la représentation spinorielle sur la partie verticale, ce qui reviendrait à changer chaque V_α en $-V_\alpha$, on peut supposer que l'élément de volume de $\mathbf{C}l(3)$ agit trivialement sur les éléments de Σ^3. Par conséquent,

$$V_\alpha \cdot V_\beta \cdot V_\gamma \cdot (\varphi \otimes \xi) = \bar{\varphi} \otimes \xi.$$

Ceci, ainsi que les formules générales de la section précédente, donne

$$\nabla_{e_i}(\varphi\otimes\xi) = (\nabla_{e_i}\varphi)\otimes\xi + \frac{1}{2} J_\alpha(e_i)\cdot V_\alpha \cdot (\varphi\otimes\xi);$$
$$\nabla_{V_\alpha}(\varphi\otimes\xi) = -\frac{1}{2}\,\Omega_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi - \frac{1}{2}\,V_\alpha\cdot\bar{\varphi}\otimes\xi;$$
$$\tilde{D}(\varphi\otimes\xi) = (D\varphi)\otimes\xi + \frac{1}{2}\,\Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi + \frac{3}{2}\bar{\varphi}\otimes\xi.$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
e_j\cdot\nabla_{e_j}(\Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi) &= e_j(e_j\cdot V_\alpha\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi + \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma} J_\beta(e_j)\cdot V_\gamma\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi\\
&\quad -\Omega_\alpha\cdot J_\alpha(e_j)\cdot\varphi\otimes\xi + \Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot(\nabla_{e_j}\varphi)\otimes\xi\\
&\quad +\frac{1}{2} J_\alpha(e_j)\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi))\\
&= 3n\varphi\otimes\xi - 2e_j\cdot J_\beta(e_j)\cdot V_\beta\cdot\bar{\varphi}\otimes\xi - 2\Omega_\alpha\cdot\Omega_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi\\
&\quad +6n\varphi\otimes\xi - \Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot D\varphi\otimes\xi + 2V_\alpha\cdot D_\alpha\varphi\otimes\xi\\
&\quad +\Omega_\alpha\cdot\Omega_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi - 3n\varphi\otimes\xi\\
&= 6n\varphi\otimes\xi - \Omega_\alpha\cdot\Omega_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi - 4\Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi\\
&\quad -\Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot D\varphi\otimes\xi + 2V_\alpha\cdot D_\alpha\varphi\otimes\xi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_\beta\cdot\nabla_{V_\beta}(\Omega_\alpha\cdot V_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi) &= -\varepsilon^{123}_{\alpha\beta\gamma}\Omega_\alpha\cdot V_\beta\cdot V_\gamma\cdot\varphi\otimes\xi\\
&\quad +\Omega_\alpha\cdot V_\beta\cdot V_\alpha\cdot(-\frac{1}{2}\,\Omega_\alpha\cdot\varphi\otimes\xi - \frac{1}{2}\,V_\alpha\cdot\bar{\varphi}\otimes\xi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi - \frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot \Omega_\beta \cdot V_\beta \cdot V_\alpha \cdot \varphi \otimes \xi \\
&\quad -\frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi \\
&= \frac{3}{2}\,\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi - 2\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi \\
&\quad +\frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot \Omega_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi \\
&= -\frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi + \frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot \Omega_\alpha \cdot \bar{\varphi} \otimes \xi,
\end{aligned}
$$

ce qui implique

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \varphi \otimes \xi) &= 6n\varphi \otimes \xi - \frac{1}{2}\,\Omega_\alpha \cdot \Omega_\alpha \cdot \varphi \otimes \xi - \frac{9}{2}\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot \varphi \otimes \xi \\
&\quad -\Omega_\alpha \cdot V_\alpha \cdot D\varphi \otimes \xi + 2V_\alpha \cdot D_\alpha \varphi \otimes \xi.
\end{aligned}
$$

En utilisant les resultats de O. Hijazi et J.-L. Milhorat (cf. [28]) et ces formules, on pourrait essayer de résoudre le problème de la minoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés quaternioniennes-Kähler. Pour l'instant il nous manque toujours un argument pour conclure. Pour des applications des résultats de ce chapitre, voir les chapitres 2, 3 et 4.

Chapter 2

La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article paru dans Communica-

tions in Mathematical Physics **169***, p. 373-384, 1995. Le résultat principal est la classification des variétés de dimension complexe impaire admettant des spineurs de Killing kählériens.*

RÉSUMÉ. – K. D. Kirchberg [35] a donné une borne inférieure de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne spinorielle compacte M de dimension complexe impaire, à courbure scalaire positive. On montre que les variétés pour lesquelles l'égalité est atteinte s'identifient aux espaces de twisteurs (cf. [53]) des variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.

ABSTRACT. – K. D. Kirchberg [35] gave a lower bound for the first eigenvalue of the Dirac operator on a spin compact Kähler manifold M of odd complex dimension with positive scalar curvature. We prove that the manifolds satisfying the limiting case are the twistor spaces (cf. [53]) of quaternionic Kähler manifolds with positive scalar curvature.

CLASSIFICATION AMS. – 53A50, 53C55, 53C25.

MOTS-CLÉS. – opérateur de Dirac, spineurs de Killing kählériens, espaces de twisteurs.

2.1 Introduction

En 1980, T. Friedrich ([14]) a montré à l'aide de la formule de Lichnerowicz et en utilisant une modification de la connexion de Levi-Civita, que sur une variété riemannienne spinorielle compacte (M^n, g), toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4\,(n-1)} \inf_M S, \tag{2.1}$$

où S est la courbure scalaire de M. En 1984, O. Hijazi ([26]) a montré que l'égalité ne peut être atteinte en (2.1) si M est kählérienne. Le cas kählérien a été considéré par Kirchberg ([35]) qui a montré que toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne spinorielle compacte $(M^{2\,m}, g)$ satisfait

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4\,m} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est impair}, \tag{2.2}$$

et

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4\,(m-1)} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est pair}, \tag{2.3}$$

Pour simplifier, on appellera *une variété-limite* une variété kählérienne spinorielle compacte $(M^{2\,m}, g, J)$ de dimension complexe impaire, pour laquelle l'égalité dans (2.2) est satisfaite.

Le cas d'égalité dans (2.3) a été analisé par Lichnerowicz [46], qui a montré que le problème se réduit au cas de la dimension complexe impaire.

En 1988, Kirchberg ([36]) classifie toutes les variétés-limites de dimension 6, et il trouve l'espace projectif complexe $\mathbf{C}\mathrm{P}^3$ et la variété de drapeaux $F_3(1, 2)$.

En [27], Hijazi définit l'opérateur de twisteurs kählérien qui permet de démontrer l'inégalité (2.2) de manière naturelle et sans faire appel aux valeurs propres de la forme de Kähler. L'intérêt de cette approche est que le cas-limite de (2.2) se caractérise par l'existence d'un champ spinoriel parallèle pour une connexion modifiée. Plus précisément, il prouve

Théorème 1 ([27]). *Soit M une variété-limite et Ψ un spineur propre qui satisfait (2.2). Alors M est un espace d'Einstein, Ψ est un spineur-twisteur Kählérien et $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, avec $\Omega \cdot \Psi_\pm = \pm(-1)^{\frac{m-1}{2}}\, i\, \Psi_\pm$, où*

Ψ_+ et Ψ_- sont les demi-spineurs associés à Ψ dans la décomposition $\Sigma M = \Sigma^+ M + \Sigma^- M$.

Dans ce qui suit, on considérera que la métrique sur les variétés-limites est toujours normalisée de telle façon que $S = n\,(n+2)$.

Le but de ce papier est de montrer le résultat suivant

Théorème A. *La seule variété-limite de dimension $8\,l+2$ est $\mathbf{C}P^{4\,l+1}$. Les variétés-limites de dimension $8\,l+6$ sont exactement les espaces de twisteurs en sens généralisé [53] associés aux variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.*

L'idée de la démonstration est d'utiliser Théorème 1 pour montrer que l'égalité dans (2.2) implique l'existence de spineurs de Killing sur un certain fibré en cercles UM au-dessus de M. La classification due à C. Bär des variétés admettant des spineurs de Killing réels [1] permet de montrer que UM admet une 3-structure de Sasaki régulière, et on remarque que M est l'espace de twisteurs associé au quotient de UM par les orbites de la 3-structure de Sasaki, en utilisant les resultats de Boyer, Galicki et Mann [7].

2.2 Préliminaires

Soit (M^{2m}, g, J) une variété kählérienne; on appelle ∇ la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent TM, ainsi que son extension au fibré des formes extérieures, et au fibré des spineurs complexes, ΣM. L'opérateur de Dirac est défini par

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i},$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base locale orthonormée de TM. A partir de J, on définit $\tilde{D}$, une autre "racine carrée du laplacien", par la formule (locale)

$$\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{n} J(e_i) \cdot \nabla_{e_i} = -\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{J(e_i)},$$

et on vérifie sans difficulté les relations

$$\tilde{D}^2 = D^2 \quad \text{et} \quad \tilde{D}D + D\tilde{D} = 0.$$

On considère l'opérateur des twisteurs kählérien $P : \Sigma M \to T^*M \otimes \Sigma M$ défini par (cf. [27])

$$P_X(\Psi) = \nabla_X \Psi + \frac{1}{n+2} X \cdot D\Psi + \frac{1}{n+2} J(X) \cdot \tilde{D}\Psi.$$

Définition 2.2.1 *Un spineur Ψ qui satisfait $P(\Psi) \equiv 0$ s'appelle un spineur-twisteur kählérien.*

L'action des k-formes sur ΣM est donnée par

$$\omega \cdot \Psi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \cdot \Psi \ .$$

Modulo cette action, la forme de Kähler Ω (définie par $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$), satisfait

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} J(e_i) \cdot e_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot J(e_i).$$

L'action de Ω sur ΣM donne une décomposition en somme directe (cf. [35])

$$\Sigma M = \oplus_{r=0}^{m} \Sigma_r M,$$

où $\Sigma_r M$ est le fibré propre de rang C_m^r associé à la valeur propre $i\,\mu_r = i\,(m - 2\,r)$ de Ω. Par rapport à cette décomposition, tout spineur Ψ s'écrit d'une manière unique comme

$$\Psi = \sum_{r=0}^{m} \Psi_r.$$

On aura besoin des formules élémentaires pour les submersions riemanniennes ([50]). Pour toute submersion riemannienne $N \to M$, on définit les tenseurs A et T sur N par

$$A_X Y = \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{H}X} \mathcal{H} Y + \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{H}X} \mathcal{V} Y,$$
$$T_X Y = \mathcal{V} \nabla_{\mathcal{V}X} \mathcal{H} Y + \mathcal{H} \nabla_{\mathcal{V}X} \mathcal{V} Y,$$

où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ sont la projection horizontale et verticale, respectivement.

Dans le cas où la fibre est de dimension 1 et totalement géodésique, les tenseurs A et T s'expriment par

$$T = 0 \quad , \quad A_{X^*} V = \nabla_{X^*} V = \nabla_V X^*,$$

$$A_{X^*}Y^* = -A_{Y^*}X^* = \frac{1}{2}\,\mathcal{V}([X^*, Y^*]),$$

où X^* est le relèvement horizontal de $X \in TM$ en un point $y \in N$, et ici, ainsi que dans tout ce qui suit, V est le vecteur unitaire en y tel que $\{X_1^*, \cdots, X_n^*, V\}$ est une base orientée de T_yN pour toute base orientée $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de $T_{\pi(y)}M$.

On conclut cette section introductive avec les définitions suivantes

Définition 2.2.2 *Un champ vectoriel X sur une variété riemannienne (M, g) s'appelle une structure de Sasaki si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. X est un champ vectoriel de Killing de longueur constante 1;

2. Le tenseur φ de type (1,1) défini par $\varphi = -\nabla X$ est une structure presque complexe sur la distribution orthogonale à X ($\varphi^2 = -1$ et $\varphi = -\varphi^*$ sur $X^\perp$);

3. $(\nabla_V\varphi)W = g(V, W)\,X - g(X, W)\,V, \qquad \forall\, U\,,\, V\;.$

Définition 2.2.3 *Un triplet (X_1, X_2, X_3) s'appelle une 3-structure de Sasaki sur Msi les conditions suivantes sont vérifiées*

1. Le vecteur X_i définit une structure de Sasaki pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$;

2. Le repère (X_1, X_2, X_3) est orthonormé;

3. Pour toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$ de signature δ on a $\nabla_{X_i}X_j = (-1)^\delta\;\; X_k$;

4. Sur la distribution $\mathcal{H}$, orthogonale à (X_1, X_2, X_3), les tenseurs $\varphi_i = -\nabla X_i$ satisfont $\varphi_i\,\varphi_j = (-1)^\delta\,\varphi_k$ pour toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$ de signature δ.

2.3 La construction de UM

Cette section est dédiée au résultat suivant

Proposition 2.3.1 *Pour toute variété-limite $(M^{2\,m}, g, J)$, il existe une variété riemannienne spinorielle UM de dimension $2\,m+1$ et une submersion riemannienne $\pi : UM \to M$ dont les tenseurs fondamentaux (cf. [50]) satisfont*

$$T = 0 \quad \text{et} \quad A_{X^*}V = J(X)^*.$$

Preuve. Toute variété-limite est une variété d'Einstein-Kähler, donc la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M est un multiple réel de la première classe de Chern de M : $[\Omega] = (2\,\pi\, n/S) c_1(M)$. Soit r le plus grand entier positif tel que $c_1(M)/r$ soit encore une classe entière. Considérons le fibré en droites complexes PM sur M, dont la première classe de Chern, $c_1(PM \to M)$, est égale à $c_1(M)/r$. On choisit une métrique hermitienne arbitraire h sur PM et on considère UM, le fibré principal associé, de groupe structural $U(1) = S^1$. Soit σ l'action (libre) de S^1 sur UM. On considère une connexion sur UM de forme de connexion α, qui induit une connexion métrique sur PM. Soit F la forme de courbure de α sur UM. La connexion sur UM induit une famille de métriques riemanniennes sur UM qui font de π une submersion riemannienne : il suffit de définir $g^c_{UM}(X,Y) = g_M(\pi_*(X), \pi_*(Y)) - c^2\,\alpha(X)\,\alpha(Y)$ $(c > 0)$, via l'identification de $\mathcal{L}(\mathcal{S}^\infty)$ avec $i\,\mathbf{R}$ qui fait correspondre $\frac{\partial}{\partial t}$ à i. La submersion riemannienne ainsi obtenue est à fibres totalement géodésiques. D'une manière évidente on a

$$[\pi^*\Omega] = \frac{2\,\pi\, n}{S} c_1(M) = \frac{2\,\pi\, n\, r}{S} c_1(PM \to M) = \frac{i\, n\, r}{S}[F].$$

Après une éventuelle modification de la connexion sur UM, on a donc les relations

$$\pi^*\Omega = \frac{i\,n\,r}{S} F$$

et

$$\begin{aligned} F(X^*,Y^*) &= d\alpha(X^*,Y^*) \\ &= -\frac{1}{2}\,\alpha([X^*,Y^*]) \\ &= \frac{1}{2\,c\,i}\, g^c_{UM}([X^*,Y^*],V) \quad (V = (1/c)\sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})), \end{aligned}$$

donc, finalement,

$$\begin{aligned} \pi^*\Omega(X^*,Y^*) &= \frac{n\,r}{2\,c\,S}\, g^c_{UM}([X^*,Y^*],V) \\ &= \frac{n\,r}{c\,S}\, A_X Y \\ &= \frac{n\,r}{c\,S}\, g^c_{UM}(\nabla_{X^*}Y^*,V) \\ &= -\frac{n\,r}{c\,S}\, g^c_{UM}(Y^*,\nabla_{X^*}V) \\ &= -\frac{n\,r}{c\,S}\, g_M(Y,\pi(A_{X^*}V)). \end{aligned}$$

Pour $c = n\,r/S$, on obtient

$$\Omega(X,Y) = -g_M(Y, \pi(A_{X^*}V)),$$

qui donne

$$A_{X^*}V = J(X)^*. \tag{2.4}$$

En fait, la variété UM est une racine maximale du fibré en droites complexes canonique sur M. On conclut la démonstration de la proposition avec le lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Pour toute submersion riemannienne $p : E \to M$ à fibres de dimension 1 et pour toute structure spinorielle sur M, il existe une structure spinorielle naturelle sur E provenant de celle sur M.*

Preuve. Soient $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ et $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$ le fibré des repères orthonormés orientés et la structure spinorielle sur M respectivement, et $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$ et $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ les fibrés obtenus par l'agrandissement des groupes structuraux. On considère aussi le fibré des repères orthonormés orientés sur E, $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(E)$. On définit

$$g : P_{\mathrm{SO}(n+1)}(E) \longmapsto P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$$

par

$$g((u^*, V)\cdot A) = [u, A],$$

car tout repère sur E s'écrit $(u^*, V)\cdot A$, où u^* est le relèvement d'un repère sur M et $A \in \mathrm{SO}(n+1)$. On vérifie facilement que g est bien défini. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\widetilde{g}} & P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M) \\
f\downarrow & & \downarrow \\
P_{\mathrm{SO}(n+1)}(E) & \xrightarrow{g} & P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
E & \xrightarrow{\pi} & M
\end{array}$$

où P est le pull-back de $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ par π et f est défini par

$$f([\widetilde{u},\alpha],e) = ((u^*,V)_e \cdot \theta(\alpha)).$$

Ici $\widetilde{u} \in P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$, $\alpha \in \mathrm{Spin}(n+1)$, u^* est le relèvement dans e de la projection de $\widetilde{u}$ dans $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ et θ est la projection de $\mathrm{Spin}(n+1)$ sur $\mathrm{SO}(n+1)$. La vérification du fait que f est bien définie et représente une structure spinorielle sur E est triviale. Ceci achève la démonstration du lemme et de la proposition.

Q.E.D.

Pour $E = UM$, on appelle ∇ la connexion de Levi-Civita sur UM, ainsi que la connexion induite sur le fibré des spineurs sur UM.

2.4 Spineurs projetables

Les résultats de cette section sont valables pour toute submersion riemannienne $E \to M$ à fibres totalement géodésiques de dimension 1 sur une variété M de dimension paire. Soit, pour $n = 2\,m$, Σ_n - la représentation irréductible de $\mathbf{Cl}_n$. Par rapport à l'action de $\mathrm{Spin}(n)$, Σ_n se décompose en

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-.$$

Si par rapport à cette décomposition, ψ s'écrit $\psi = \psi_+ + \psi_-$, on note $\bar{\psi} = \psi_+ - \psi_-$.

L'algèbre $\mathbf{Cl}_{n+1}$ a deux représentations irréductibles, $\Sigma_{n+1}^{\pm}$, dont la somme directe est la représentation spinorielle Σ_{n+1}. Les sous-espaces $\Sigma_{n+1}^{\pm}$ de Σ_{n+1} sont les sous-espaces propres de la multiplication par $\omega = i^m\, e_1 \cdots e_{n+1}$ avec la valeur propre $\pm\, i$. On identifie $\Sigma_{n+1}^{\pm}$ avec Σ_n par les actions $\rho^{\pm}$ de $\mathbf{Cl}_{n+1}$ sur Σ_n suivantes

$$\rho^{\pm}(e_k) \cdot \psi = \begin{cases} e_k \cdot \psi & \text{si } k \leq n \\ \pm\, i \cdot \bar{\psi} & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on identifie Σ_{n+1}^+ avec Σ_n par l'intermédiaire de ρ^+. En utilisant les notations de la section précédente, on définit $h : \Sigma^+ E \to \Sigma M$ par la formule

$$h([\widetilde{v},\psi]) = [\widetilde{g}(\widetilde{v}),\psi],$$

et on vérifie facilement qu'il est bien défini. Evidemment, $\Sigma^+ E = \pi^*(\Sigma M)$.

Définition 2.4.1 *On appelle spineur projetable tout champ spinoriel Ψ sur E qui satisfait $h(\Psi_e) = h(\Psi_f)$ pour tous e et f tels que $\pi(e) = \pi(f)$.*

Tout spineur projetable Φ sur E induit d'une manière évidente un spineur $h(\Phi)$ sur M. Réciproquement, tout spineur Ψ sur M induit un unique spineur projetable $\widetilde{\Psi}$ sur E par la formule $\widetilde{\Psi} = \pi^*\Psi$. Dans un certain sens, les spineurs projetables sont les spineurs sur E "constants" le long des fibres de la fibration $E \to M$.

Si $\widetilde{\Phi}$ est projetable sur Φ, alors $X^* \cdot \widetilde{\Phi}$ est projetable sur $X \cdot \Phi$ et $V \cdot \widetilde{\Phi}$ est projetable sur $i\,\bar{\Phi}$.

Proposition 2.4.1 *Soit $\widetilde{\Phi}$ un spineur sur E, projetable sur Φ. Alors $\tilde{\nabla}_{X^*}\widetilde{\Phi}$ est projetable sur*

$$\nabla_X \Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*}V) \cdot \bar{\Phi},$$

et $\tilde{\nabla}_V \widetilde{\Phi}$ est projetable sur

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot X_j \cdot \Phi.$$

Preuve. Soit $s = (X_1, \cdots, X_n)$ une section locale de $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ qui induit une section $[s, I_{n+1}]$ de $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$ et une section s_0 de $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$. A son tour, s_0 induit une section $\widetilde{s}(e) = (s_0(\pi(e)), e)$ de la structure spinorielle $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(E)$. Si le spineur Φ s'écrit localement $\Phi = [s, \phi]$, où $\phi : U \subset M \to \Sigma_n$ alors $\widetilde{\Phi} = [\widetilde{s}, \psi]$, où $\psi = \phi \circ \pi$, et on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^*}\widetilde{\Phi} &= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_{X^*} X_j^*, X_k^* \rangle \cdot \widetilde{\Phi} + [\widetilde{s}, X^*(\psi)] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum X_j^* \cdot V \langle \tilde{\nabla}_{X^*} X_j^*, V \rangle \cdot \widetilde{\Phi} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_{X^*} X_j^*, X_k^* \rangle \cdot \widetilde{\Phi} + [\widetilde{s}, X(\phi)] - \\
&\quad - \frac{1}{2} A_{X^*}V \cdot V \cdot \widetilde{\Phi},
\end{aligned}$$

qui est projetable sur

$$\frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle \nabla_X X_j, X_k \rangle \cdot \Phi + [s, X(\phi)] - \frac{1}{2}\pi_*(A_{X^*}V) \cdot V \cdot \Phi =$$

$$= \nabla_X \Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*} V) \cdot \bar{\Phi}.$$

La deuxième partie de la proposition se démontre de la même manière:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_V \widetilde{\Phi} &= \frac{1}{2} \sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, X_k^* \rangle \cdot \widetilde{\Phi} + [\widetilde{s}, V(\psi)] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum X_j^* \cdot V \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, V \rangle \cdot \widetilde{\Phi} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j<k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, X_k^* \rangle \cdot \widetilde{\Phi} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j,k} X_j^* \cdot X_k^* \langle \tilde{\nabla}_V X_j^*, X_k^* \rangle \cdot \widetilde{\Phi} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j} X_j^* \cdot \tilde{\nabla}_V X_j^* \cdot \widetilde{\Phi} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j} X_j^* \cdot \pi_*(A_{X_j^*} V) \cdot \widetilde{\Phi},
\end{aligned}$$

qui est projetable sur $-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*} V) \cdot X_j \cdot \Phi$.

Q.E.D.

Corollaire 2.4.1 *Si D^E et D sont les opérateurs de Dirac sur E et M respectivement, alors pour tout spineur $\widetilde{\Phi}$ projetable sur Φ, $D^E \widetilde{\Phi}$ est projetable sur $D\Phi - \frac{1}{4}\, i \sum_{j=1}^{n} X_j \pi_*(A_{X_j^*} V) \cdot \bar{\Phi}$. En particulier, pour $E = UM$ on a*

$$h(D^{UM} \widetilde{\Phi}) = D\Phi + \frac{1}{2}\, i\, \Omega \cdot \bar{\Phi}. \qquad (2.5)$$

2.5 Spineurs de Killing

Dans cette section E sera une variété riemannienne spinorielle de dimension impaire $2\,m + 1$ avec la connexion de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$. Les résultats qu'on obtient seront utilisés dans les sections suivantes dans le cas où E est le fibré UM sur M construit ci-dessus.

Soit CE le cône sur E, c.à.d. $CE = E \times \mathbf{R}_+^*$ avec la métrique $\bar{g} = r^2 g_E + dr^2$. Alors la dérivée covariante $\bar{\nabla}$ de la connexion de Levi-Civita de $\bar{g}$ satisfait les formules des produits tordus ([51], p.206)

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0\ , \qquad (2.6)$$

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} X = \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} X \ , \tag{2.7}$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - r \, \langle X, Y \rangle_E \frac{\partial}{\partial r} \ , \tag{2.8}$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur E, identifiés aussi avec leurs prolongements canoniques à CE.

On identifie $\Sigma^+_{2\,m+2}$ avec $\Sigma_{2\,m+1}$ par l'isomorphisme de $\mathbf{Cl}^+_{2\,m+2}$ sur $\mathbf{Cl}_{2\,m+1}$ donné par $e_i \cdot e_{2\,m+2} \mapsto e_i$. On applique, mutatis mutandis, les mêmes raisonnements des deux sections précédentes, et on trouve (en utilisant (2.6), (2.7), (2.8))

Proposition 2.5.1 *Soit $\widetilde{\Phi}$ un spineur sur CE, projetable sur Φ. Alors $\bar{\nabla}_X \widetilde{\Phi}$ est projetable sur*

$$\tilde{\nabla}_X \Phi - \frac{1}{2} X \cdot \Phi,$$

et $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \widetilde{\Phi} = 0$.

Donc si E admet un spineur de Killing de constante $-\frac{1}{2}$, CE admet un spineur parallèle. Ceci est une manière plus simple de classifier les variétés simplement connexes admettant des spineurs de Killing, sans passer par les formes de connexion et les groupes d'holonomie, comme dans le papier initial de Bär ([1]).

Remarque 2.5.1 *Si E admet un spineur de Killing de constante $\frac{1}{2}$, alors $-CE$ admet un spineur parallèle, où $-CE$ est CE avec l'orientation opposée. Ceci résulte tout simplement du fait que si on change l'orientation de CE, alors pour tout spineur $\widetilde{\Phi}$ sur CE projetable sur Φ, le spineur qui sera projetable sur $X \cdot \Phi$ est $X \cdot (-\frac{\partial}{\partial t}) \cdot \widetilde{\Phi}$ et non pas $X \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \widetilde{\Phi}$.*

2.6 Démonstration du théorème principal

Soit maintenant M une variété-limite de dimension $n = 2\,m$, m impair, et $UM \to M$ la submersion riemannienne construite dans les sections précédentes. Supposons que sur M il existe un spineur Ψ qui satisfait $D\Psi = \lambda\,\Psi$, avec

$$\lambda^2 = \frac{n+2}{4\,n} \inf_M S.$$

Le théorème 1 montre que S est constant, et que

$$\nabla_X \Psi + \frac{1}{n+2} X \cdot D\Psi + \frac{1}{n+2} J(X) \cdot \tilde{D}\Psi = 0. \tag{2.9}$$

On choisit un repère local orthonormé $(X_1, \cdots, X_n)$. On multiplie (2.9), pour $X = X_i$, par $J(X_i)$, on somme sur i, et on obtient

$$\tilde{D}\Psi = -\Omega \cdot D\Psi = -\lambda\, \Omega \cdot \Psi. \tag{2.10}$$

De la deuxième partie du théorème 1 on tire

$$\tilde{D}\Psi = -i\, \varepsilon\, \lambda\, \bar{\Psi}, \tag{2.11}$$

où $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$, donc on a

$$\nabla_X \Psi + \frac{\lambda}{n+2} X \cdot \Psi - \frac{i\, \varepsilon\, \lambda}{n+2} J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0. \tag{2.12}$$

On a supposé au début que la métrique sur M est renormalisée de telle manière que $S = n\,(n+2)$, donc $\lambda^2 = (\frac{n+2}{2})^2$, ce qui donne $\lambda = \pm\, \frac{n+2}{2}$. Du fait que n est pair, le spectre de D est symétrique par rapport à 0, donc on peut supposer $\lambda = \frac{\varepsilon\,(n+2)}{2}$, où $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$. Alors (2.12) donne

$$\nabla_X \Psi + \frac{\varepsilon}{2} X \cdot \Psi - \frac{i}{2} J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0. \tag{2.13}$$

Soit $\tilde{\Psi}$ le spineur projetable induit par Ψ sur UM. Par la proposition 2.4.1, $\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{\Psi}$ est projetable sur $\nabla_X \Psi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*} V) \cdot \bar{\Psi}$ et par la proposition 2.3.1, $\pi_*(A_{X^*} V) = J(X)$. Ainsi, $\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{\Psi}$ est projetable sur $\nabla_X \Psi - \frac{1}{2}\, i\, J(X) \cdot \bar{\Psi}$. De plus, $\frac{\varepsilon}{2}\, X^* \cdot \tilde{\Psi}$ est projetable sur $\frac{\varepsilon}{2} X \cdot \Psi$, donc (2.13) montre que

$$\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{\Psi} + \frac{\varepsilon}{2} X^* \cdot \tilde{\Psi} = 0 \quad \forall\ X \in TM.$$

D'autre part, de la deuxième partie de la proposition 2.4.1 on tire

$$\begin{aligned} h(\tilde{\nabla}_V \tilde{\Psi}) &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*} V) \cdot X_j^* \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{2}\, \Omega \cdot \Psi \\ &= -\frac{i\, \varepsilon}{2}\, \bar{\Psi} \\ &= h(-\frac{\varepsilon}{2} V \cdot \tilde{\Psi}). \end{aligned}$$

Donc $\tilde{\Psi}$ est un spineur de Killing de $\Sigma^+ UM$ de constante $-\frac{\varepsilon}{2}$. De plus, $\tilde{\Psi}$ est un spineur projetable, donc par la proposition 2.4.1

$$\begin{aligned} h(-\frac{\varepsilon}{2} V \cdot \tilde{\Psi}) &= h(\tilde{\nabla}_V \tilde{\Psi}) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*} V) \cdot X_j \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} J(X_j) \cdot X_j \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{2} \Omega \cdot \Psi \\ &= -\frac{1}{2} h(\widetilde{\Omega} \cdot \tilde{\Psi}), \end{aligned}$$

où $\widetilde{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} J(X_j^*) \cdot X_j^*$. Par conséquent,

$$\varepsilon V \cdot \tilde{\Psi} = \widetilde{\Omega} \cdot \tilde{\Psi}. \tag{2.14}$$

Comme M est une variété d'Einstein-Kähler de constante d'Einstein positive, le théorème de Kobayashi ([39]) montre que M est simplement connexe. En considérant la suite exacte d'homotopie et la suite exacte de Thom-Gysin du fibré (UM, π, M, S^1), on obtient que UM est lui aussi simplement connexe (cf. [47]). La classification de Bär montre alors que le groupe d'holonomie du cône CM sur UM est un des groupes du tableau suivant

n = dimension de M	Hol(CM)
n arbitraire	0
$n+2 = 2k$	SU(k)
$n+2 = 4k$	Sp(k)
$n+2 = 8$	Spin(7)
$n+2 = 7$	G_2

Pour $n = 6$, le cas Hol$(CM) =$ Spin(7) est impossible car V définit une structure de Sasaki sur UM, donc CM est kählérienne et Ricci-plate ce qui montre que le groupe d'holonomie de CM est inclus dans SU(4) $\subset$ Spin(7) (strictement) (cf. [1], pp.14).

On montre à présent que le cas Hol$(CM) =$ SU$(2k)$ est, lui aussi, impossible. Considérons le relèvement parallèle Φ de $\tilde{\Psi}$ dans CM, où l'orientation de CM serait désormais $-\varepsilon$. La forme de Kähler de CM est $\hat{\Omega} = \Omega + \widetilde{J}(V) \cdot V = \widetilde{\Omega} - \frac{\partial}{\partial t} \cdot V = \widetilde{\Omega} + V \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ (cf. [1], pp.13). De la section précédente on sait que $V \cdot (-\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \Phi$ est projetable sur $V \cdot \tilde{\Psi}$, donc $\hat{\Omega} \cdot \Phi$ est projetable sur $\widetilde{\Omega} \cdot \tilde{\Psi} - \varepsilon V \cdot \tilde{\Psi}$ qui est nul à cause de (2.14). Sur CM on a donc trouvé un spineur parallèle qui se trouve dans le noyau de $\hat{\Omega}$, $\Sigma_k CM$. D'autre part, un raisonnement purement algébrique montre que les deux spineurs parallèles se trouvent respectivement dans $\Sigma_0 CM$ et $\Sigma_{2k} CM$, une contradiction. Les seuls cas qui restent sont par conséquent $\mathrm{Hol}(CM) = \mathrm{Sp}(k)$ et $\mathrm{Hol}(CM) = 0$. Dans chacun de ces deux cas, UM admet une 3-structure de Sasaki. Pour montrer sa régularité, il suffit de remarquer que, si (V, X, Y) définit la 3-structure de Sasaki sur UM, alors la projection de X et Y sur M est une distribution intégrable et régulière de dimension 2 sur M, dont les orbites sont des sphères S^2 (cf. [24]). Un raisonnement algébrique, montre que dans le cas $n = 8l + 2$, il n'y a pas de spineur parallèle dans $\Sigma_k CM$, sauf si $CM = \mathbf{R}^{n+2}$, ce qui implique $M = \mathbf{C}\mathrm{P}^{4l+1}$. Finalement, le quotient de UM par la 3-structure de Sasaki est une variété quaternionienne de courbure scalaire positive, et M est l'espace des twisteurs associé à cette variété quaternionienne, car il est le quotient de UM par une des structures de Sasaki (cf. [7]).

Réciproquement, pour $n = 8l + 6 = 4k - 2$, si V^{n-2} est une variété quaternionienne de courbure scalaire positive, il existe un fibré N^{n+1}, au-dessus de V, qui admet une 3-structure de Sasaki régulière. Soit M le quotient de N par l'orbite d'un des 3 vecteurs de Killing. Alors M est une variété kählérienne spinorielle, étant l'espace des twisteurs de V. D'autre part, N est une variété d'Einstein de courbure scalaire $n\,(n+1)$, car il admet une 3-structure de Sasaki. Alors les formules de [50], pp.465 montrent que M est une variété d'Einstein avec la courbure scalaire $S = n\,(n+2)$. Le cône sur N, CN, est hyperkählérien, donc il existe un spineur parallèle $\bar{\Psi}$ dans $\Sigma_k CN$, projetable sur un spineur $\tilde{\Psi}$ sur N, qui par le paragraphe ci-dessus est à son tour projetable sur un spineur Ψ sur M qui satisfait (2.13). En plus, comme $\tilde{\Psi}$ satisfait (2.14), on obtient

$$\Omega \cdot \Psi = -i\,\bar{\Psi}, \tag{2.15}$$

donc $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, avec $\Omega \cdot \Psi_\pm = \mp i\,\Psi_\pm$. De (2.13) et (2.15) on tire

$$D\Psi + \frac{n}{2}\,\Psi + \Psi = 0,$$

qui montre que Ψ est un spineur propre avec $\lambda = \frac{-(n+2)}{2}$, i.e. M est une variété-limite.

Q.E.D.

Remarques. 1. On peut se poser la question : d'où vient la différence entre les cas $n = 8l + 2$ et $n = 8l + 6$? A part la raison "algébrique" (l'inexistence d'un spineur parallèle dans le noyau de la forme de Kähler de CM pour $n = 8l+2$), il y a une raison "topologique" aussi : pour $n = 8l+2$, le seul espace de twisteurs qui est en même temps une variété *spinorielle*, est $\mathbf{C}\mathrm{P}^{4l+1}$, comme espace de twisteurs de $\mathbf{H}\mathrm{P}^{2l}$. On peut faire l'analogie avec le cas de la dimension complexe paire : ici l'inégalité de Kirchberg peut être améliorée par rapport à la dimension complexe impaire à cause d'une contrainte "algébrique" (sur les valeurs propres de Ω), mais une "raison topologique" est le fait que les espaces projectifs ne sont pas spinoriels en dimension complexe paire.

2. Si $\mathrm{Hol}(CM) = 0$, on a $UM = S^{n+1}$ (cf. [1]) et un raisonnement simple montre que $M = \mathbf{C}\mathrm{P}^m$. Du fait que $dim(\Sigma_{\frac{m+1}{2}}(M)) = C_{m+1}^{\frac{m+1}{2}}$, on trouve $C_{m+1}^{\frac{m+1}{2}}$ spineurs propres de D sur $\mathbf{C}\mathrm{P}^m$ avec la valeur propre $m+1$.

3. Si $n = 8l - 2$, et $\mathrm{Hol}(CM) = \mathrm{Sp}(2l)$, on trouve un seul spineur parallèle dans $\Sigma_{2l}CM$, donc un seul spineur propre de D sur M avec la valeur propre $m+1$, dont le conjugué est un spineur propre avec la valeur propre $-(m+1)$.

Exemples. Les seuls exemples connus de variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive sont des espaces symétriques. On a trois familles

$$\mathbf{H}\mathrm{P}^k = \frac{Sp(k+1)}{Sp(k)\times Sp(1)}, \quad X^k = \frac{SU(k+2)}{S(U(k)\times U(2))}, \quad Y^k = \frac{SO(k+4)}{S(O(k)\times O(4))},$$

et 5 exemples correspondant aux groupes exceptionnels. La première famille a comme famille de variétés-limites $M^{4k+2} = \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+1}$. La famille X^k induit comme variétés-limites la famille de variétés des drapeaux (k impair)

$$F_{k+2}(2,1) = \{(V_1, V_2)|\ 0 \in V_1 \subset V_2 \subset \mathbf{C}^{k+2}, dim_{\mathbf{C}} V_i = i\}.$$

La famille Y^k induit comme variétés-limites les espaces homogènes (k impair)

$$Z^{4k+2} = \frac{SO(k+4)}{S(O(k)\times O(3)\times O(2))}.$$

Pour des détails, on propose [53].

Remerciements. Je tiens à remercier Jean Pierre Bourguignon pour les nombreuses idées partagées au cours de nos discussions.

Chapter 3

Kählerian Killing Spinors, Complex Contact Structures and Twistor Spaces

Le contenu de chapitre a fait l'objet d'une note écrite en collaboration avec Uwe Semmelmann, parue dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sci-

ences, **t. 323**, *Série I, p.57-61, 1996. On démontre, parmi d'autres résultats, que les seules variétés de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact sont les espaces de twisteurs des variétés quaternioniennes-Kähler à courbure scalaire positive.*

Résumé. – On utilise nos résultats récents ([38] et [49]) pour montrer l'équivalence des trois notions du titre sous certaines conditions. On obtient ensuite des conséquences sur les variétés de Sasaki, les structures presque complexes de contact, et les k-structures complexes de contact.

Abstract. – We collect our recent results ([38] and [49]) and we get the equivalence of the three notions of the title under some conditions. We then use this equivalence in order to prove some consequences about Sasakian manifolds, complex almost contact structures and complex k-contact structures.

Classification AMS. – 53C15, 53A50, 53C55, 53C25.

Mots-clés. – espaces de twisteurs, spineurs de Killing kählériens, structure complexe de contact.

Version Française Abrégée - Soit M une variété kählérienne spinorielle compacte de dimension complexe impaire $m = n/2$ et courbure scalaire positive R. Alors, toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac D satisfait l'inégalité (cf. [35])

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m} \inf_M R.$$

Dans le cas où l'égalité est satisfaite, M s'appelle une *variété-limite* et tout spineur propre Ψ de D correspondant aux valeurs propres $\pm\sqrt{(m+1)R/4m}$ est un *spineur de Killing kählérien*, c.à.d. satisfait l'équation différentielle (cf. [27]):

$$\nabla_X \Psi + \frac{1}{n+2} X \cdot D\Psi + \frac{1}{n+2} J(X) \cdot \tilde{D}\Psi = 0,$$

où $\tilde{D}$ est l'opérateur de Dirac tordu par J, dont l'expression dans une base $\{e_i\}$ orthonormée est $\tilde{D} = J(e_i) \cdot \nabla_{e_i}$. Dans [49] on démontre:

Théorème. *La seule variété-limite de dimension $8l+2$ est $\mathbf{C}P^{4l+1}$. Les variétés-limites de dimension $8l+6$ sont exactement les espaces de twisteurs des variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.*

D'autre part, si M^{4k} est une variété quaternionienne à courbure scalaire positive, son espace de twisteurs (cf. [53]) admet une métrique de Kähler-Einstein à courbure scalaire positive et une structure complexe de contact. Enfin, dans [38] on démontre le résultat suivant:

Théorème. *Une variété M^{8l+6} de Kähler-Einstein à courbure scalaire positive admettant une structure complexe de contact est spinorielle et possède un spineur de Killing kählérien.*

En utilisant ces deux théorèmes on trouve, parmi d'autres corollaires:

Théorème. *Les seules variétés de Kähler-Einstein en dimension complexe $4k+3$, admettant une structure complexe de contact sont les espaces de twisteurs des variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.*

3.1 Introduction

The notion of a *complex contact structure* was introduced in the late 50's by S. Kobayashi (cf. [39]), in analogy to real contact structures.

In 1982 in [53], S. Salamon investigated quaternionic Kähler manifolds. In particular, he defined the *twistor space* over such a manifold as a generalization of the classical notion of twistor space over a self-dual 4-manifold.

In 1986, K.D. Kirchberg was led to define *Kählerian Killing Spinors*, in order to characterize Kähler spin manifolds of odd complex dimension admitting the smallest possible eigenvalue of the Dirac operator (cf. [35]). Some important contributions to this problem are also due to O. Hijazi (cf. [27]).

The aim of this paper is to collect our recent results (cf. [38] and [49]), in order to explain the close connection between these three notions and to derive some corollaries.

3.2 Previous results

In this section we describe the three notions introduced above, and recall relevant results obtained in each of these directions.

Let M be a compact spin Kähler manifold of odd complex dimension $m = n/2$ and positive scalar curvature R. Then, each eigenvalue λ of the Dirac operator D satisfies the inequality (cf. [35])

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m} \inf_M R.$$

In the limiting case of this inequality, M is Einstein and any eigenspinor Ψ of D corresponding to the eigenvalues $\pm\sqrt{(m+1)R/4m}$ is a *Kählerian Killing spinor*, i.e., satisfies the following first-order differential equation (cf. [27]):

$$\nabla_X \Psi + \frac{1}{n+2} X \cdot D\Psi + \frac{1}{n+2} J(X) \cdot \tilde{D}\Psi = 0,$$

where by $\tilde{D}$ we mean the twisted Dirac operator, given in an orthonormal base $\{e_i\}$ by $\tilde{D} = J(e_i) \cdot \nabla_{e_i}$. We call such M a *limiting manifold.* Conversely, any compact Kähler manifold admitting Kählerian Killing spinors is a limiting manifold. The first examples of such manifolds were the complex projective spaces $\mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+1}$.

Using complex contact structures it is possible to construct other manifolds admitting Kählerian Killing spinors. We will shortly describe the construction of [38].

Definition 3.2.1 (cf.[39]) *Let M^{2m} be a complex manifold of complex dimension*
$m = 2k+1$. A complex contact structure is a family $\mathcal{C} = \{(U_i, \omega_i)\}$ satisfying the following conditions:

(i) *$\{U_i\}$ is an open covering of M.*

(ii) *ω_i is a holomorphic 1-form on U_i.*

(iii) *$\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^k \in \Gamma(\Lambda^{m,0} M)$ is different from zero at every point of U_i.*

(iv) *$\omega_i = f_{ij}\omega_j$ in $U_i \cap U_j$, where f_{ij} is a holomorphic function on $U_i \cap U_j$.*

Let $\mathcal{C} = \{(U_i, \omega_i)\}$ be a complex contact structure. Then there exists an associated holomorphic line subbundle $L_{\mathcal{C}} \subset \Lambda^{1,0}(M)$ with transition functions $\{f_{ij}^{-1}\}$ and local sections ω_i. From condition (iii) immediately follows the isomorphism $L_{\mathcal{C}}^{k+1} \cong K$, where $K = \Lambda^{m,0}(M)$ denotes the canonical bundle of M. If we assume k to be an odd integer then M admits a canonical spin structure. It is given by the isomorphism

$$L_{\mathcal{C}}^{\frac{k+1}{2}} \quad \cong \quad K^{\frac{1}{2}} \quad \cong \quad S_0. \tag{3.1}$$

Here S_0 is the subbundle of the spinor bundle S which is defined as the eigenspace of Ω for the eigenvalue $-i\,m$, where the Kähler form Ω is considered as endomorphism of S. We construct now a section $\Psi_{\mathcal{C}}$ of the spinor bundle which is associated to the contact structure $\mathcal{C}$. For doing so we fix $(U, \omega) \in \mathcal{C}$ and define $\Psi_{\mathcal{C}}$ over the open set U by

$$\Psi_{\mathcal{C}}\,|_U := |\Psi_\omega|^{-2}\,\bar{\eta}_\omega \cdot \Psi_\omega\,, \tag{3.2}$$

where $\Psi_\omega \in \Gamma(S_0\,|_U)$ is the local section in S_0 corresponding to $\omega^{\otimes\,\frac{k+1}{2}}$ under the identification (3.1) and $\eta_\omega := \omega \wedge (\partial\omega)^{\frac{k-1}{2}}$. From the condition (iv) it follows that the spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ is globally defined. We have the following

Proposition 3.2.1 (cf. [38]) *Let (M, g, J) be a compact Kähler-Einstein manifold of complex dimension $m = 2k+1$ with k odd, and let $\mathcal{C}$ be a complex contact structure on M. Then the spinor $\Psi_{\mathcal{C}}$ associated with $\mathcal{C}$ satisfies the equation*

$$D^2\,\Psi_{\mathcal{C}} \;=\; \frac{m+1}{4m}\,R\,\Psi_{\mathcal{C}},$$

where R is the scalar curvature of (M, g). In particular, the spinors
$\Psi_{\mathcal{C}}^{\pm} := \lambda_1\Psi_{\mathcal{C}} \pm D\Psi_{\mathcal{C}}$ are Kählerian Killing spinors, where $\lambda_1 = \sqrt{\frac{m+1}{4m}R}$.

A class of manifolds satisfying the assumptions of Proposition 3.2.1 are the twistor spaces of quaternionic Kähler manifolds introduced by S. Salamon (cf. [53]).

A *quaternionic Kähler manifold* is defined to be a 4n-dimensional oriented Riemannian manifold whose restricted holonomy group is contained in the subgroup $Sp(n)Sp(1) \subset SO(4n)$ $(n \geq 2)$. Salamon's idea is to construct over each such manifold M a natural $\mathbf{C}\mathrm{P}^1-$ bundle Z, admitting a Kähler metric such that the bundle projection is a Riemannian submersion. He called this bundle the *twistor space* of M.

Proposition 3.2.2 (cf.[53]) *Let M^{4k} be a quaternionic Kähler manifold with positive scalar curvature. Then its twistor space Z admits a Kähler Einstein metric of positive scalar curvature and a complex contact structure. Moreover, Z is spin for odd k and Z is spin for even k iff $Z = \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+1}$.*

From Propositions 3.2.1 and 3.2.2 we obtain that all the twistor spaces of quaternionic Kähler manifolds M^{4k} $(k \equiv 1(2))$ with positive scalar curvature admits Kählerian Killing spinors, i.e. they are limiting manifolds.

The only explicitly known manifolds of this kind are the following three families:

- $Sp(k+1)/Sp(k) \times U(1) \quad \cong \quad \mathbf{C}\mathrm{P}^{2k+1}$,
- $SU(k+2)/S(U(k) \times U(1) \times U(1))$,
- $SO(k+4)/S(O(k) \times O(3) \times O(2))$.

and the 15–dimensional exceptional space $F_4/Sp(3)U(1)$.

It is now interesting to see that each such limiting manifold (i.e. each spin Kähler manifold of odd complex dimension and positive scalar curvature admitting Kählerian Killing spinors) has to be a twistor space. This is due to the following classification result:

Proposition 3.2.3 (cf. [49]) *The limiting manifolds of complex dimension $4l+3$ are exactly the twistor spaces associated to quaternionic Kähler manifolds of positive scalar curvature. The only limiting manifold of complex dimension $4l+1$ is $\mathbf{C}\mathrm{P}^{4l+1}$.*

The idea of the proof is the following. Take a limiting manifold M and consider a maximal root of the canonical line bundle with some hermitian metric.

The associated principal $U(1)$-bundle over M, say P_M, with a carefully chosen metric, is spin, and any spinor on M induces a *projectable* spinor on P_M. Moreover, a Kählerian Killing spinor induces a projectable real Killing spinor on P_M. This forces P_M to admits a regular Sasakian 3-structure and M to be the twistor space over the quotient of P_M by the Sasakian 3-structure.

The last part of the proposition follows from the fact that the only spin twistor space of complex dimension $4l+1$ is $\mathbf{C}\mathrm{P}^{4l+1}$.

3.3 The results

Combining the above propositions we have

Theorem 3.3.1 *Let M be a compact spin Kähler manifold of positive scalar curvature and complex dimension $4l+3$. Then the following statements are equivalent:*

(i) *M admits Kählerian Killing spinors;*

(ii) *M is Kähler-Einstein and admits a complex contact structure;*

(iii) *M is the twistor space of some quaternionic Kähler manifold of positive scalar curvature.*

As an immediate corollary we have the following result:

Corollary 3.3.1 *If M is a Kähler-Einstein manifold of positive scalar curvature and complex dimension $4l+3$ which admits a complex contact structure, then M is the twistor space of some quaternionic Kähler manifold of positive scalar curvature.*

This important result was obtained recently and using completely different methods by C. LeBrun (cf. [43]). He proves the same statement but without the restriction on the dimension. The interest of our proof lies in the unexpected appearance of the Dirac operator. As a less obvious corollary we have the following

Corollary 3.3.2 *Let M be a Riemannian manifold of real dimension $n = 8l+7$, admitting a Sasakian 3-structure which is regular in one direction. Then it is regular in all directions.*

Proof. Let V be the Killing vector field in the regular direction. We denote by N the quotient of M by the S^1-action in the direction of V. Regularity just means that N is a manifold. Now a simple calculation (cf. [30]) shows that N is a Kähler–Einstein manifold admitting a complex contact structure.

Corollary 3.3.1 yields that N is the twistor space of some quaternionic Kähler manifold Q, of positive scalar curvature. Using [30] once again, we see that the 2-distribution given by the two other Killing vector fields of the Sasakian 3-structure, projects on the 2-distribution Θ which gives the complex contact structure on N. So the quotient of M by the Sasakian 3-structure is diffeomorphic to the space of leaves of Θ, which is exactly the manifold Q. Thus our Sasakian 3-structure is regular.

Remark 3.3.1 *Corollary 3.3.2 is also true for $n = 8l + 3$. We just have to use the result of C. LeBrun [43] instead of Corollary 3.3.1 in the above proof. Actually, as recently pointed out to us by K. Galicki, Corollary 3.3.2 is a result of S. Tanno [56].*

In [31] S. Ishihara and M. Konishi introduced the concept of *complex almost contact structures*. These are the hermitian manifolds of odd complex dimension $2n+1$ whose structure group can be reduced to $U(1) \times (Sp(n) \otimes U(1))$ (the tensor product here means semi-direct product). They proved that each such manifold under an additional normality condition admits a Kähler–Einstein metric and also a complex contact structure. In [30] they also showed the existence of a normal complex almost contact structure on the S^1–quotient of a 3–Sasakian space which is regular in one direction. From Theorem 3.3.1 we then have

Corollary 3.3.3 *Let M be a complete Hermitian manifold with a complex almost contact structure. Then the structure is normal iff M is the twistor space of some quaternionic Kähler manifold of positive scalar curvature.*

To give a last application of Theorem 3.3.1 we consider a generalization of complex contact structures. For this let $\mathcal{C} = \{U_i, \omega_i\}$ be a family of (local) r–forms which again satisfies conditions (i) – (iv) of Definition 1, where (iii) has to be changed into:

(iii)$'$ $\omega_i \wedge (\partial\omega_i)^s \in \Gamma(\Lambda^{m,0}M \,|_{U_i})$ is different from zero at each point of U_i.

Here $s = \frac{m-r}{r+1}$ must be an integer. Such a family was called a complex r–contact structure in [38]. If s is an odd integer then M again admits a canonical spin structure. In this situation it is once more possible to construct a Kählerian Killing spinor $\psi_{\mathcal{C}}$ (similar to (3.2)). Theorem 3.3.1 then implies

Proposition 3.3.1 *Let* (M^{2m}, g, J) *be a compact Kähler–Einstein manifold with positive scalar curvature which admits a complex r–contact structure such that* $s = (m - r)/(r + 1)$ *is an odd integer. Then* M *is a complex contact manifold.*

Acknowledgements. This note was finished during our stay at the E. Schrödinger Institut in Vienna. We would like to thank the Institute for support and hospitality.

Chapter 4

Spineurs et variétés de Hodge

Ce chapitre reprend le texte intégral d'une prépublication (Numéro 1126) du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique. On étudie ici les rela-

tions entre les spectres des opérateurs de Dirac sur l'espace total et la base d'une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques de dimension 1, dans le cas où la base est une variété de Hodge.

RÉSUMÉ. – *Soit N une variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière. Le quotient M de N par l'action de S^1 correspondante, avec la métrique qui fait de la projection $N \to M$ une submersion riemannienne, est une variété de Hodge, c.à.d. une variété kählérienne compacte dont la classe de cohomologie de la forme de Kähler est un multiple réel d'une classe entière. Réciproquement, au-dessus de toute variété de Hodge M il existe un fibré en cercles N qui admet une métrique riemannienne et une structure de Sasaki régulière, tel que la projection $N \to M$ est une submersion riemannienne. Etant donné une submersion riemannienne $N \to M$ à fibres S^1, on a introduit dans [49] la notion de spineur projetable sur N (dans le cas où M est spinorielle), et on a vu que l'espace des spineurs projetables est invariant par l'opérateur de Dirac sur N. Le but de ce papier est de relier le spectre de l'opérateur de Dirac sur M, au spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur N, dans le cas où M est une variété de Hodge et N le fibré en cercles décrit ci-dessus.*

ABSTRACT. – *Consider a compact Riemannian manifold N admitting a regular Sasakian structure. The quotient M of N with respect to the corresponding S^1–action, endowed with the metric which makes the projection $N \to M$ a Riemannian submersion, is a Hodge manifold. Conversely, on each Hodge manifold M, there is a circle bundle N admitting a Riemannian metric with a regular Sasakian structure, such that the projection $N \to M$ is a Riemannian submersion. Given a Riemannian submersion $N \to M$ with 1–dimensional fibres, we introduced in [49] the notion of projectable spinor on N (for M spin), and we saw that the space of projectable spinors is D–invariant, where D is the Dirac operator on N. The goal of this paper is to find the relations between the spectra of the Dirac operators on M and N, when M is a Hodge manifold and N is the corresponding Sasakian circle bundle.*

CLASSIFICATION AMS. – *53A50, 53C25, 53C55, 53C80.*

MOTS-CLÉS. – *structures de Sasaki, opérateur de Dirac, variétés de Hodge, spineurs.*

4.1 Préliminaires et notations

Soit (M^{2m}, g, J) une variété kählérienne; on appelle ∇ la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent TM, ainsi que son extension au fibré des formes extérieures, et au fibré des spineurs complexes, ΣM. On considère l'opérateur de Dirac, D, et l'opérateur de Dirac "tordu" par J, $\tilde{D}$

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}, \quad \tilde{D} = \sum_{i=1}^{n} J(e_i) \cdot \nabla_{e_i} = -\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{J(e_i)},$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base locale orthonormée de TM. Ils vérifient les relations

$$\tilde{D}^2 = D^2 \quad \text{et} \quad \tilde{D}D + D\tilde{D} = 0.$$

La forme de Kähler Ω est définie par $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$. L'action de Ω sur ΣM donne une décomposition en somme directe (cf. [35])

$$\Sigma M = \oplus_{r=0}^{m} \Sigma^r M,$$

où $\Sigma^r M$ est le fibré propre de rang C_m^r associé à la valeur propre $i\,\mu_r = i\,(m - 2\,r)$ de Ω. Par rapport à cette décomposition, tout spineur Ψ s'écrit d'une manière unique comme

$$\Psi = \sum_{r=0}^{m} \Psi^r.$$

On vérifie sans difficulté les relations

$$[\Omega, D] = -2\,\tilde{D}\ ,\ \ [\Omega, \tilde{D}] = 2\,D\ ,\ \ [\Omega, D^2] = 0. \tag{4.1}$$

Suivant O'Neill ([50]), on définit les tenseurs fondamentaux d'une submersion riemannienne. Pour toute submersion riemannienne $N \to M$, on définit les tenseurs A et T sur N par

$$T_X Y = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{H}Y + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y,$$

$$A_X Y = \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{H}Y + \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{V}Y,$$

où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ sont la projection horizontale et verticale, respectivement.

Dans le cas où la fibre est de dimension 1, la submersion est totalement géodésique si et seulement si $\nabla_V V = 0$.

On conclut cette section introductive avec la définition suivante

Définition 4.1.1 *Un champ vectoriel X sur une variété riemannienne (M, g) s'appelle une structure de Sasaki si les conditions suivantes sont vérifiées*

1. X est un champ vectoriel de Killing de longueur constante 1;

2. Le tenseur φ de type (1,1) défini par $\varphi = -\nabla X$ est une structure presque complexe sur la distribution orthogonale à X ($\varphi^2 = -1$ et $\varphi = -\varphi^*$ sur $X^\perp$);

3. $(\nabla_V \varphi)W = g(V, W)\, X - g(X, W)\, V, \qquad \forall\, U\,,\, V\;.$

4.2 Les opérateurs D_+ et D_-

Les résultats de cette section sont valables pour toute variété kählérienne compacte M. Considérons la décomposition de chiralité $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$. Si, par rapport à cette décomposition, Ψ s'écrit $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, on définit le conjugué de Ψ par la formule $\bar{\Psi} = \Psi_+ - \Psi_-$. Soit T l'opération de conjugaison: $T(\Psi) = \bar{\Psi}$. On introduit les opérateurs fondamentaux D_+ et D_- par

$$D_+ = D + i\, \tilde{D} \circ T \qquad , \qquad D_- = D - i\, \tilde{D} \circ T.$$

Lemme 4.2.1 *Les opérateurs D_+ et D_- commutent avec D et $\tilde{D}$, anticommutent avec T, et ont les propriétés suivantes*

$$D_+ \circ D_- = D_- \circ D_+ = 0\ ;\ D_+^2 = 2D_+ \circ D\ ;\ D_-^2 = 2D_- \circ D, \tag{4.2}$$

$$D_+ \circ \Omega = \Omega \circ D_+ + 2\, i\ T \circ D_+\ ;\ D_- \circ \Omega = \Omega \circ D_- - 2\, i\ T \circ D_- \cdot \tag{4.3}$$

Preuve. Les relations (4.2) se vérifient par calcul direct. Pour montrer (4.3) on utilise (4.1).

Q.E.D.

Soit $\Sigma_0 M = \ker D = \ker D^2$ l'espace des spineurs harmoniques. On va noter par $\Gamma_0(\Sigma M)$ le complément orthogonal de $\Sigma_0 M$ dans $\Gamma(\Sigma M)$, et par $\Sigma_+ M$ et $\Sigma_- M$ les compléments orthogonaux de $\Sigma_0 M$ dans $\ker D_+$, respectivement $\ker D_-$.

Lemme 4.2.2 *On a une décomposition en somme directe $\Gamma_0(\Sigma M) = \Sigma_+ M \oplus \Sigma_- M$.*

Preuve. D'abord, $\Sigma_+M \cap \Sigma_-M = \{0\}$, car il n'y a pas de spineur harmonique dans $\Gamma_0(\Sigma M)$. Soit $\Psi \in \Gamma_0(\Sigma M)$ un spineur et $\Phi \in \Gamma_0(\Sigma M)$ tel que $D(\Phi) = \Psi$. L'existence de Φ est garantie par le fait que D est un opérateur elliptique auto-adjoint, donc surjectif sur le complémentaire orthogonal de son noyau. Alors

$$\Psi = (\Psi - \frac{D_+\Phi}{2}) + \frac{D_+\Phi}{2},$$

et le lemme 4.2.1 montre que $(\Psi - \frac{D_+\Phi}{2}) \in Ker(D_+)$ et $\frac{D_+\Phi}{2} \in Ker(D_-)$. Il reste à remarquer que chacune de ces deux composantes de Ψ est orthogonale à $\ker D$.

Q.E.D.

Lemme 4.2.3 *Les décompositions*

$$\Gamma(\Sigma M) = \Sigma_+M \oplus \Sigma_-M \oplus \Sigma_0 M$$

et

$$\Gamma(\Sigma M) = \oplus_{r=0}^{m}\Gamma(\Sigma^r M)$$

sont compatibles, dans le sens que

$$\Gamma(\Sigma^r M) = (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_+M) \oplus (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_-M)) \oplus (\Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_0 M).$$

Preuve. Soit $\Psi \in \Sigma^r M$. Il faut montrer que si $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$ avec $\Psi_0 \in \Sigma_0 M$, $\Psi_1 \in \Sigma_+M$ et $\Psi_2 \in \Sigma_-M$, alors $\Psi_0\,, \Psi_1\,, \Psi_2 \in \Sigma^r M$. Tout d'abord, $\Psi_0 \in \Sigma^r M$ car Ω et D^2 commutent. Soit maintenant $\Phi \in (\ker D)^\perp$ tel que $D(\Phi) = \Psi_1 + \Psi_2$. On a vu que $\Psi_2 = D_+\Phi/2 = D\Phi/2 + i\tilde{D}\bar{\Phi}/2$, donc il suffit de vérifier que $\tilde{D}\Phi \in \Sigma^r M$, car le premier terme du dernier membre est égal à $(\Psi - \Psi_0)/2 \in \Sigma^r M$. En utilisant (4.1) et le fait que $D\Phi = \Psi - \Psi_0 \in \Sigma^r M$, on a

$$\begin{aligned}
D(\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi) &= \Omega D\tilde{D}\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\
&= -\Omega\tilde{D}D\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\
&= -\tilde{D}\Omega D\Phi - 2D^2\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\
&= -i\mu_r\tilde{D}D\Phi - 2D^2\Phi + 2\tilde{D}^2\Phi - i\mu_r D\tilde{D}\Phi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi \in \ker D$. En même temps, $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi \in (\ker D)^\perp$, (car $\Phi \in (\ker D)^\perp$), donc $\Omega\tilde{D}\Phi - i\mu_r\tilde{D}\Phi = 0$, c'est à dire, $\tilde{D}\Phi \in \Sigma^r M$.

Q.E.D.

Définition 4.2.1 *On appelle* $\Sigma_0^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_0 M$, $\Sigma_+^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_+ M$ *et* $\Sigma_-^r M = \Gamma(\Sigma^r M) \cap \Sigma_- M$.

Il est évident que les espaces $\Sigma_0^r M$, $\Sigma_+^r M$ et $\Sigma_-^r M$ sont invariants à D^2. Soient F_0^r, F_+^r et F_-^r les ensembles des valeurs propres de la restriction de D^2 à $\Sigma_0^r M$, $\Sigma_+^r M$ et $\Sigma_-^r M$, respectivement. Evidemment, $F_0^r = \{0\}$ ou $\emptyset$.

Lemme 4.2.4

$$Spec(D^2) = \cup_r (F_+^r \cup F_-^r \cup F_0^r).$$

Preuve. Soit Ψ un spineur propre non-nul de D^2 avec la valeur propre λ. Le fait que D^2 et Ω commutent montre qu'on peut supposer $\Psi \in \Gamma(\Sigma^r M)$ pour un certain r. Soit $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$ la décomposition de Ψ correspondante à la décomposition $\Sigma^r M = \Sigma_0^r M \oplus \Sigma_+^r M \oplus \Sigma_-^r M$. L'unicité de cette décomposition montre que $D^2 \Psi_+ = \lambda \Psi_+$ et $D^2 \Psi_- = \lambda \Psi_-$. Si au moins un des Ψ_+ et Ψ_- est non-nul, on a $\lambda \in F_+^r$, ou $\lambda \in F_-^r$. Sinon, $\lambda = 0$ et $F_0^r = \{0\}$.

Q.E.D.

4.3 Variétés de Sasaki et variétés de Hodge

Dans cette section on décrit la correspondance bijective entre les variétés riemanniennes compactes admettant une structure de Sasaki régulière, et les variétés de Hodge.

Proposition 4.3.1 *Soit* (N, g) *une variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière notée* V, *et* M *l'ensemble des orbites de* V. *Alors* M *est une variété compacte admettant une métrique kählérienne, et la classe de cohomologie de la forme de Kähler de* M *est multiple d'une classe entière.*

Preuve. Le fait que M est une variété est donné par la régularité de la structure de Sasaki. La compacité est évidente. Ensuite, tout vecteur X dans $x \in M$ s'identifie d'une manière canonique à un champ de vecteurs X^* sur la fibre N_x satisfaisant les conditions

$$[X^*, V] = 0 \tag{4.4}$$

et

$$g(X^*, V) = 0 \tag{4.5}$$

On considère sur M la métrique $\tilde{g}$ définie par $\tilde{g}(X,Y) = g(X^*,Y^*)$. Le deuxième membre ne dépend pas du point de la fibre N_x où on se situe, car $V(g(X^*,Y^*)) = (\mathcal{L}_V g)(X^*,Y^*) + g([V,X^*],Y^*) + g(X^*,[V,Y^*]) = 0$, grâce au fait que V est un champ de vecteurs de Killing. Evidemment, $\tilde{g}$ est l'unique métrique qui fait de la projection $N \to M$ une submersion riemannienne.

On définit une structure presque complexe J sur M par

$$J(X)^* = -\varphi(X^*).$$

J est bien défini car $\varphi(X^*)$ vérifie (4.5) grâce à la condition 2 de la définition 4.1.1 et il vérifie (4.4) grâce à la condition 3 de la même définition. La condition 2 de cette définition montre aussi que J est une structure presque complexe, et la condition 3 montre que J est parallèle. Enfin, l'intégrabilité de J, c'est à dire l'annulation du tenseur de Nijenhuis de J, est donnée par la condition 3 aussi.

M est donc une variété kählérienne. Pour vérifier la dernière affirmation de la proposition, considérons la S^1-fibration principale $N \to M$. La distribution orthogonale à V définit une connexion de cette fibration, avec la forme de connexion α et la forme de courbure F, et on voit facilement (voir la démonstration de la proposition suivante), que la forme de Kähler de M est un multiple réel de F, dont la classe de cohomologie est, évidement, entière.

Q.E.D.

Réciproquement, on a le résultat suivant:

Proposition 4.3.2 *Soit (M,g,J) une variété de Hodge. Il existe alors une S^1-fibration principale $N \to M$, une métrique riemannienne sur N, telle que la projection $N \to M$ soit une submersion riemannienne, et une structure de Sasaki régulière sur N. En plus, la variété kählérienne obtenue à partir de N donnée par la proposition précédente, est exactement M.*

Preuve. La condition sur la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M, Ω, assure l'existence d'une S^1-fibration principale $\pi : N \to M$ et d'une connexion dont la forme de courbure F satisfait

$$\pi^*\Omega = i\, r\, F \ , \ r \in \mathbf{R}.$$

Pour tout vecteur X sur M on note X^* le relevé horizontal de X par rapport à cette connexion. Soit σ l'action (libre) de S^1 sur N. La forme de connexion, α, induit une famille de métriques riemanniennes sur N qui font de π une submersion riemannienne : il suffit de définir

$$g_N^c(X,Y) = g(\pi_*(X), \pi_*(Y)) - c^2\, \alpha(X)\, \alpha(Y) \quad (c > 0),$$

via l'identification de $\mathcal{L}(S^1)$ avec $i\,\mathbf{R}$ qui fait correspondre $\frac{\partial}{\partial t}$ à i. Dans tout point $y \in N$, on note par V^c le vecteur unitaire dans y, défini par $V^c = (1/c)\sigma_*(\frac{\partial}{\partial t})$. On a donc

$$\begin{aligned} F(X^*, Y^*) &= d\alpha(X^*, Y^*) \\ &= -\frac{1}{2}\, \alpha([X^*, Y^*]) \\ &= \frac{1}{2\,c\,i}\, g_N^c([X^*, Y^*], V^c), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \pi^*\Omega(X^*, Y^*) &= \frac{r}{2\,c}\, g_N^c([X^*, Y^*], V^c) \\ &= \frac{r}{c}\, A_{X^*}Y^* \\ &= \frac{r}{c}\, g_N^c(\nabla_{X^*}Y^*, V^c) \\ &= -\frac{r}{c}\, g_N^c(Y^*, \nabla_{X^*}V^c) \\ &= -\frac{r}{c}\, g(Y, \pi(A_{X^*}V^c)). \end{aligned}$$

Pour $c = r$, on obtient

$$\Omega(X,Y) = -g(Y, \pi(A_{X^*}V^c)),$$

qui donne

$$A_{X^*}V^c = J(X)^*. \tag{4.6}$$

Soit $g_N = g_N^r$ et $V = V^r$. On montre à présent que la submersion $(N, g_N) \to M$ est à fibres totalement géodésiques. On a

$$0 = F(V, X^*) = d\alpha(V, X^*) = -\frac{1}{2}\, \alpha([V, X^*]),$$

donc $[V, X^*]$ est un champ horizontal pour tout champ vectoriel X sur M. En même temps, V est projetable sur 0 et X^* sur X, donc $[V, X^*]$ est projetable sur 0, c'est à dire il est vertical. On a montré que

$$[V, X^*] = 0. \tag{4.7}$$

Du fait que $g_N(V,V)=1$ on voit que $g_N(V,\nabla_{X^*}V)=0$. Il en suit

$$0=g_N(V,\nabla_V X^*)=g(\nabla_V V,X^*),$$

et donc $\nabla_V V=0$, ce qui montre que la submersion π est à fibres totalement géodésiques.

Finalement, on montre que V satisfait les conditions 1-3 de la définition 4.1.1. La première condition résulte facilement de (4.7). La deuxième exprime le fait que J est une structure presque complexe compatible avec la métrique de M: en effet, de l'équation (4.6) on a

$$\varphi(X^*)=-J(X)^*.$$

Enfin, la troisième condition est satisfaite grâce au fait que $\nabla J=0$.

Q.E.D.

Remarque 4.3.1 *La condition de Hodge sur M est automatiquement satisfaite dans le cas où la métrique serait de Kähler-Einstein. Dans ce cas-là, la construction qu'on vient de décrire est le pas décisif vers la classification des variétés admettant des spineurs de Killing kählériens (cf. [49]).*

4.4 Spineurs projetables

Dans cette section on rappelle la définition et les propriétés des spineurs projetables, présentées dans [49]. Soit $N\to M$ une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, et ∇ et $\tilde\nabla$ les dérivées covariantes de M, respectivement N, étendues aux fibrés des spineurs, si ces derniers existent. On note par V le champ de vecteurs unitaires verticaux qui donne l'orientation de N et par $\{X_i\}$ une base orthonormée de M.

Lemme 4.4.1 (cf. [49]) *Toute structure spinorielle sur M induit une structure spinorielle naturelle sur N. Tout champ spinoriel sur M induit un champ spinoriel sur N.*

Définition 4.4.1 *Les spineurs sur N ainsi obtenus s'appellent projetables.*

Tout spineur projetable $\tilde\Psi$ sur N induit un unique spineur Ψ sur M. On dit que $\tilde\Psi$ est projetable sur Ψ.

Proposition 4.4.1 *Soit $\tilde{\Phi}$ un spineur sur N, projetable sur Φ. Alors $\tilde{\nabla}_{X^*}\tilde{\Phi}$ est projetable sur*

$$\nabla_X \Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*}V) \cdot \bar{\Phi},$$

et $\tilde{\nabla}_V \tilde{\Phi}$ est projetable sur

$$-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot X_j \cdot \Phi.$$

Les corrolaires suivants ne devraient donc pas surprendre:

Corollaire 4.4.1 *Un spineur $\tilde{\Psi}$ sur N est projetable si et seulement si*

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\Psi} = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} (A_{X_j^*}V) \cdot X_j^* \cdot \tilde{\Psi}.$$

Corollaire 4.4.2 *Si D^N et D sont les opérateurs de Dirac sur N et M respectivement, alors pour tout spineur $\tilde{\Phi}$ projetable sur Φ, $D^N \tilde{\Phi}$ est projetable sur $D\Phi - \frac{1}{4}\, i \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot \bar{\Phi}$.*

4.5 Les relations entre les spectres

Dorénavant, $N \to M$ désignera la submersion riemannienne décrite par les deux propositions de la section 4, et on suppose que M est spinorielle. Considérons une structure spinorielle sur M, qui induit, par le lemme 4.4.1, une structure spinorielle sur N. On note par D et $\hat{D}$ les opérateurs de Dirac sur M et N, et on identifie chaque spineur sur M avec le spineur projetable sur N qu'il induit. Avec cette identification, on a la relation suivante:

Lemme 4.5.1 *Les opérateurs D et $\hat{D}$ sont reliés par la formule*

$$\hat{D}^2 \Psi = D^2 \Psi + i\, \tilde{D} \bar{\Psi} - \frac{1}{4} \Omega^2 \cdot \Psi. \tag{4.8}$$

Preuve. Le corollaire 4.4.2 et la formule (4.6) donnent

$$\hat{D}\Psi = D\Psi + \frac{1}{2} i\, \Omega \cdot \bar{\Psi}. \tag{4.9}$$

Si on remplace dans (4.9) Ψ par $D\Psi + (i/2)\,\Omega \cdot \bar{\Psi}$, et on utilise (4.1), on tire

$$\begin{aligned}\hat{D}^2\Psi &= D(D\Psi + \frac{1}{2}i\,\Omega \cdot \bar{\Psi}) + \frac{1}{2}i\,\Omega \cdot (-D\bar{\Psi} + \frac{1}{2}i\,\Omega \cdot \Psi)\\ &= D^2\Psi + \frac{1}{2}i\,(D(\Omega \cdot \bar{\Psi}) - \Omega \cdot D\bar{\Psi}) - \frac{1}{4}\Omega^2 \cdot \Psi\\ &= D^2\Psi + i\,\tilde{D}\bar{\Psi} - \frac{1}{4}\Omega^2 \cdot \Psi.\end{aligned}$$

Q.E.D.

On a vu dans la section 3 que

$$Spec(D^2) = \cup_r(F_+^r \cup F_-^r \cup F_0^r),$$

et le spectre de D s'en déduit facilement, grâce à la parité de la dimension de M. Soit $\lambda_+^r = \pm\sqrt{\alpha_+^r} \in Spec(D)$, et $\Psi_+^r \in \Sigma_+^r M$ un spineur propre de D^2 avec la valeur propre α_+^r. Le lemme 4.5.1 et la définition de D_+ donnent

$$\left(\hat{D} + \frac{1}{2}\right)^2 \Psi_+^r = \left((\lambda_+^r)^2 + \left(\frac{\mu_r - \varepsilon}{2}\right)^2\right)\Psi_+^r,$$

où $\varepsilon = (-1)^r$. Donc $(\lambda_+^r)^2 + ((\mu_r - \varepsilon)/2)^2$ est une valeur propre de $(\hat{D}+1/2)^2$.

Faisons ici une petite remarque évidente. Soit P un opérateur linéaire sur un espace vectoriel quelconque, et v un vecteur propre de P^2 avec la valeur propre λ^2; si $P(v) \pm \lambda v \neq 0$, alors λ et $-\lambda$ sont des valeurs propres de P.

On applique cette remarque pour $P = \hat{D} + (1/2)$, considéré comme opérateur sur l'espace vectoriel des spineurs sur M, et pour $v = \Psi_+^r$. Le spineur Ψ_+^r étant un spineur chiral pur et non-nul, on ne peut pas avoir $(\hat{D} + (1/2))\Psi_+^r = \lambda\Psi_+^r$, à cause du corollaire 4.4.2. On a donc trouvé

$$-(1/2) \pm \sqrt{(\lambda_+^r)^2 + ((\mu_r - \varepsilon)/2)^2}$$

comme valeurs propres de $\hat{D}$. D'une manière analogue, pour toute valeur propre $\lambda_-^r = \pm\sqrt{\alpha_-^r} \in Spec(D)$, on trouve les valeurs propres

$$(1/2) \pm \sqrt{(\lambda_-^r)^2 + ((\mu_r + \varepsilon)/2)^2}$$

dans le spectre de $\hat{D}$ (où $\varepsilon = (-1)^r$). Enfin, pour tout r tel que $\Sigma_0^r M \neq \emptyset$, on trouve $\pm\mu_r/2$ comme valeurs propres de $\hat{D}$. On a donc démontré le résultat suivant:

Théorème 4.5.1 *Soit M une variété de Hodge spinorielle munie d'une métrique kählérienne, et N la variété riemannienne compacte admettant une structure de Sasaki régulière, qui correspond à M par la bijection définie dans la section 4. Alors N a une structure spinorielle provenant canoniquement de celle de M, et si le spectre du carré de l'opérateur de Dirac sur M est donné par les familles F_0^r F_+^r et F_-^r décrites ci-dessus, alors le spectre de l'opérateur de Dirac sur N, restreint au spineurs projetables, est donné par les familles*

$$\pm\frac{1}{2}\mu_r \quad , \quad si\ F_0^r \neq \emptyset,$$

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\lambda_+^r)^2 + \left(\frac{\mu_r - \varepsilon}{2}\right)^2} \quad , \quad (\lambda_+^r)^2 \in F_+^r,$$

et

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\lambda_-^r)^2 + \left(\frac{\mu_r + \varepsilon}{2}\right)^2} \quad , \quad (\lambda_-^r)^2 \in F_-^r,$$

où $\varepsilon = (-1)^r$.

4.6 Remarques et applications

1. Dans le cas où m est impair, il existe (cf. [35]) une application canonique anti-unitaire de fibrés, $j : \Sigma M \to \Sigma M$, qui est une structure réelle ($j^2 = id$), qui commute avec D et $\tilde{D}$, et que définit un isomorphisme $\Sigma^r M \to \Sigma^{m-r} M$ pour chaque r. Ceci montre que j anticommute avec la conjugaison T, donc $D_+ \circ j = j \circ D_-$ et $D_- \circ j = j \circ D_+$. Par conséquent, tout spineur propre de D^2, $\Psi_+^r \in \Gamma(\Sigma_+^r M)$, induit un spineur propre de D^2, $\Psi_-^{m-r} \in \Gamma(\Sigma_-^{m-r} M)$, avec la même valeur propre, et réciproquement. On a donc $F_+^r = F_-^{m-r}$. Pour r pair on va noter $S^r = F_+^r$ et $T^r = F_-^r$ et pour r impair on va noter $S^r = F_-^r$ et $T^r = F_+^r$. On a toujours

$$Spec(D^2) = \cup_r (S^r \cup T^r),$$

et le raisonnement qu'on vient de faire montre que cette fois-ci, le spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur N est donné par les familles

$$\pm\frac{1}{2}\mu_r \quad , \quad \text{si } F_0^r \neq \emptyset, \tag{4.10}$$

$$\pm\frac{1}{2}\pm\sqrt{\nu^r+\left(\frac{\mu_r-1}{2}\right)^2} \quad , \qquad \nu^r\in S^r, \tag{4.11}$$

et

$$\pm\frac{1}{2}\pm\sqrt{\lambda^r+\left(\frac{\mu_r+1}{2}\right)^2} \quad , \qquad \lambda^r\in T^r. \tag{4.12}$$

L'avantage de cette écriture est que la parité de r n'intervient plus. On remarque que S^m et T^0 sont vides.

2. Récemment, dans [55], S. Seifarth et U. Semmelmann ont calculé le spectre de l'opérateur de Dirac sur l'espace projectif complexe de dimension complexe impaire $m = 2\,k+1$. Ils trouvent deux familles de valeurs propres de D sur $(\mathbf{C}\mathrm{P}^m, g^{F-S})$, $\pm\sqrt{\lambda_{l,r}}$ et $\pm\sqrt{\nu_{l,r}}$, où

$$\lambda_{l,r}=\left(l+\frac{m-1}{2}\right)\left(l+\frac{m-1}{2}+\frac{\mu_r+1}{2}\right),$$

$$r\in\{1,\ldots,m\}\text{ et }l\geq max\{1,r-\frac{m-1}{2}\}$$

$$\nu_{l,r}=\left(l+\frac{m+1}{2}\right)\left(l+\frac{m+1}{2}+\frac{\mu_r-1}{2}\right),$$

$$r\in\{0,\ldots,m-1\}\text{ et }l\geq max\{0,r-\frac{m-1}{2}\}.$$

(On a noté par g^{F-S} la métrique de Fubini-Study, dont la courbure scalaire est $m(m+1)$).

En utilisant leurs calculs, on va maintenant donner une application du théorème 4.5.1 concernant les spineurs projetables de la sphère de dimension $4\,k+3$. Considérons la sphère (S^{2m+1}, can) $(m = 2\,k+1)$, avec la métrique canonique, qui admet, évidement, une structure de Sasaki projetable. Il est facile de voir que la variété kählérienne qui lui correspond par la bijection décrite dans la section 4 est exactement $(\mathbf{C}\mathrm{P}^m, 4\,g^{F-S})$. En appliquant les résultats de S. Seifarth et U. Semmelmann, on trouve sans difficulté que les familles S^r et T^r décrites dans le paragraphe ci-dessus sont données par

$$S^r=\left\{4\left(l+\frac{m+1}{2}\right)\left(l+\frac{m+1}{2}+\frac{\mu_r-1}{2}\right),\right.$$

$$\left. r\in\{0,\ldots,m-1\}\text{ et }l\geq max\{0,r-\frac{m-1}{2}\}\right\},$$

et

$$T^r = \Big\{4\Big(l + \frac{m-1}{2}\Big)\Big(l + \frac{m-1}{2} + \frac{\mu_r+1}{2}\Big),$$
$$r \in \{1,\ldots,m\} \text{ et } l \geq max\{1, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\}.$$

Les formules (4.11) et (4.12) montrent alors que le spectre de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur la sphère (S^{2m+1}, can) est donné par les familles

$$\Big\{\pm\frac{1}{2} \pm (2\,l + m + 1 - r + \frac{m-1}{2}),$$
$$r \in \{0,\ldots,m-1\} \text{ et } l \geq max\{0, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\},$$

et

$$\Big\{\pm\frac{1}{2} \pm (2\,l + m - 1 - r + \frac{m+1}{2}),$$
$$r \in \{1,\ldots,m\} \text{ et } l \geq max\{1, r - \frac{m-1}{2}\}\Big\}.$$

On trouve donc

$$\Big\{\pm\Big(\frac{2\,m+1}{2} + k\Big)\ ,\ k \geq 0\Big\},$$

comme valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les spineurs projetables sur la sphère (S^{2m+1}, can), donc, en synthétisant, on a le résultat suivant:

Corollaire 4.6.1 *Dans chaque espace propre pour l'opérateur de Dirac sur la sphère de dimension $4\,k+3$ il existe un spineur propre projetable.*

Remerciements. Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Jean Pierre Bourguignon, sous la direction duquel je prépare ma thèse, et envers le Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, qui m'accueille depuis 1993.

Chapter 5

Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans Studii şi

Cercetări Matematice **48**, *no. 1-2, p.85-88, 1996. En utilisant les spineurs projetables on trouve ici des nouvelles valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une variété admettant une structure 3-sasakienne et on donne des estimations sur leur multiplicités.*

Résumé. – Une variété riemannienne simplement connexe (M^n, g) $(n = 4\,k - 1)$ admettant une 3-structure de Sasaki est automatiquement spinorielle et d'Einstein, de courbure scalaire constante $S = (4\,k - 1)(4\,k - 2)$, et l'opérateur de Dirac sur M admet la valeur propre $n/2$ avec la multiplicité $k + 1$, correspondant aux spineurs de Killng ([1]). En utilisant la notion de spineur projetable qu'on a introduite dans [49], on met en évidence deux autres valeurs propres de l'opérateur de Dirac, en donnant des estimations sur leur multiplicités.

Abstract. – A simply connected Riemannian manifold (M^n, g) $(n = 4\,k - 1)$ admitting a 3-Sasakian structure is automatically spin and Einstein, of constant scalar curvature $S = (4\,k - 1)(4\,k - 2)$, and the Dirac operator on M admits the eigenvalue $n/2$ with multiplicity $k + 1$, corresponding to the Killing spinors ([1]). Using the notion of projectable spinors that we introduced in [49], we find two other eigenvalues of the Dirac operator and give estimations on their multiplicities.

Classification AMS. – 53A50, 53C25, 53C55.

Mots-clés. – opérateur de Dirac, structure 3-sasakienne.

5.1 Structures 3-sasakiennes

Soit M^n une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki ($n = 4\,k-1$). Soit ΣM le fibré des spineurs sur M et D l'opérateur de Dirac sur ΣM. Alors (cf. [34]), M est un espace d'Einstein avec la courbure scalaire $S = n(n-1)$ et on sait (cf. [1]) que M admet $k+1$ spineurs de Killing avec la constante $-\frac{1}{2}$, donc la première valeur propre de D est $\frac{n}{2}$ avec la multiplicité $k+1$. Le but de cet article est de trouver deux autres valeurs propres de D et d'établir des inégalités sur les multiplicités de ces valeurs propres. L'outil principal sera la construction du cône CM au-dessus de M et la correspondence entre les spineurs sur M et sur CM. Le cône sur M est défini par $CM = M \times \mathbf{R}_+^*$ avec la métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle_{CM} = r^2\langle\cdot,\cdot\rangle_M + dr^2$. Les champs de vecteurs sur M induisent des champs de vecteurs sur CM avec lequels ils seront identifiés dans la suite.

Théorème (C. Bär). *Le fibré des spineurs au-dessus de CM est l'image réciproque de ΣM par la projection $\pi : CM \to M$. Tout spineur sur M induit un spineur sur CM; les spineurs ainsi obtenus seront appellés projetables. Un spineur sur M est de Killing si et seulement si le spineur induit sur CM est parallèle. (cf. aussi [49]).*

Dans ce qui suit, on identifiera souvent un spineur sur M avec le spineur projetable induit sur CM.

La structure hyperkählérienne sur CM s'obtient de la manière suivante: tout champ de vecteurs de Killing X appartenant à la 3-structure de Sasaki sur M induit une structure presque complexe Ω^X sur CM par

$$\Omega^X(X) = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Omega^X(\frac{\partial}{\partial r}) = -X,$$

$$\Omega^X(Y) = \nabla_Y X, \quad \text{pour } Y \perp X \text{ et } \frac{\partial}{\partial r}.$$

On notera par η^X la transformation de ΣM donnée par $\eta^X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} e_i \cdot \nabla_{e_i} X \cdot$, où (e_i) est une base orthonormée arbitraire de $X^\perp$.

Pour X comme ci-dessus, Ω^X agit sur l'espace des spineurs parallèles sur CM avec les valeurs propres distinctes $\lambda_j = i(2\,k-4\,j)$, $j \in \{0,...,k\}$. Soit $\tilde{\psi}_j^X$ un spineur propre parallèle propre pour la valeur propre λ_j de Ω^X, et

ψ_j^X le spineur de Killing sur M correspondant (tout spineur parallèle sur CM est projetable).

On voit facilement que si $\tilde{\psi}$ est projetable sur ψ alors $Y \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \tilde{\psi}$ est projetable sur $Y \cdot \psi$ pour tout vecteur Y sur M (cf. [49]), donc

$$\Omega^X \cdot \tilde{\psi}_j^X = \lambda_j \tilde{\psi}_j^X \iff \eta^X \cdot \psi_j^X + X \cdot \psi_j^X = \lambda_j \psi_j^X. \tag{5.1}$$

5.2 Nouvelles valeurs propres de D

Des calculs précédents on déduit une relation fondamentale:

$$\begin{aligned} D(X \cdot \psi_j^X) &= \sum_{l=1}^{n-1} e_l \cdot \nabla_{e_l}(X \cdot \psi_j^X) + X \cdot \nabla_X (X \cdot \psi_j^X) \\ &= 2\eta^X \cdot \psi_j^X - \frac{n-1}{2} X \cdot \psi_j^X + \frac{1}{2} X \cdot \psi_j^X \\ &= (-1 - \frac{n}{2}) X \cdot \psi_j^X + 2\lambda_j \psi_j^X. \end{aligned}$$

Ceci montre que le spineur $X \cdot \psi_j^X - 2\lambda_j \psi_j^X/(n+1)$ est un spineur propre pour D avec la valeur propre $-1 - \frac{n}{2}$. La relation (5.1) montre alors que $(n-1)X \cdot \psi - 2\eta^X \cdot \psi$ est spineur propre de D avec la valeur propre $-1 - \frac{n}{2}$ pour tout spineur de Killing ψ. Notons $\tau^s = X_s - \frac{2}{n+1}\Omega^s = \frac{n-1}{n+1} X_s - \frac{2}{n+1}\eta^s$.

Théorème 5.2.1 *La multiplicité de la valeur propre $-1 - \frac{n}{2}$ est au moins égale à $3(k-1)$.*

Preuve. On fixe une base orthonormée (X_1, X_2, X_3) de vecteurs de Killing définissant la 3-structure de Sasaki sur M et pour chaque $s \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{0, ..., k\}$, ψ_j^s un spineur propre de Ω^{X_s} avec la valeur propre λ_j. Il suffit de montrer que les spineurs $\phi_j^s = \tau^s \cdot \psi_j^s$ sont linéairement indépendants pour $s \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, ..., k-1\}$.

Soient donc a_j, b_j, c_j, $j \in \{1, ..., k-1\}$ tels que

$$\sum a_j \phi_j^1 + \sum b_j \phi_j^2 + \sum c_j \phi_j^3 = 0. \tag{5.2}$$

Notons $\psi^1 = \sum a_j \psi_j^1$, $\psi^2 = \sum b_j \psi_j^2$, $\psi^3 = \sum c_j \psi_j^3$. Si, d'une part, on multiplie (5.2) avec $\frac{1}{2} X_s$, et d'autre part, on dérive la même égalité dans la direction de X_s, et on somme les deux résultats obtenus pour chaque s, on obtient le système

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_2 \cdot \psi^2 + X_3 \cdot \psi^3) = 0$$

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_1 \cdot \psi^1 + X_3 \cdot \psi^3) = 0$$

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_1 \cdot \psi^1 + X_2 \cdot \psi^2) = 0$$

Un calcul algébrique simple montre que pour tout $s \in \{1, 2, 3\}$, le noyau K de la multiplication par $(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)$ ne contient pas les spineurs non-nuls qui se trouvent dans l'espace vectoriel V^s engendré par ψ_j^s, $j \in \{1, ..., k-1\}$. Mais le système ci-dessus montre que ψ^1 , ψ^2 , ψ^3 appartiennent repectivement à V^1, V^2, V^3 et à K, par conséquent ils sont nuls. Ceci montre que les coefficients a_j , b_j , c_j sont nuls, ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

On passe maintenant à la recherche d'une autre valeur propre de D. Soit $\psi \in V$ un spineur de Killing sur M. Soit $\{e_1, ..., e_{n-3}\}$ un repère local orthonormé de l'espace supplémentaire de l'espace engendré par les trois vecteurs de Killing X_1, X_2, X_3 dans TM. On a

$$\begin{aligned}
D(X_1 \cdot X_2 \cdot \psi) &= \sum e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \sum e_i \cdot X_1 \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&\quad + \sum e_i \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \nabla_{e_i} \psi + X_1 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \psi - \\
&\quad - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_1 \cdot \psi - X_2 \cdot X_3 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - \frac{1}{2} X_2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi + X_3 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - X_3 \cdot X_1 \cdot X_1 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_3 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \psi \\
&= \sum X_2 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot \psi - \sum X_1 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&\quad + \frac{n-3}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi + \\
&\quad + X_3 \cdot \psi + \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi \\
&= X_2 \cdot (2\eta^1 \cdot \psi + 2 X_2 \cdot X_3 \cdot \psi) -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -X_1 \cdot (2\eta^2 \cdot \psi - 2X_1 \cdot X_3 \cdot \psi) + \\
& + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 2X_3 \cdot \psi \\
= \; & 2X_2 \cdot \eta^1 \cdot \psi - 2X_1 \cdot \eta^2 \cdot \psi + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6X_3 \cdot \psi \\
= \; & 2X_2 \cdot (\Omega^1 - X_1) \cdot \psi - 2X_1 \cdot (\Omega^2 - X_2) \cdot \psi + \\
& + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6X_3 \cdot \psi \\
= \; & (2 + \frac{n}{2}) X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + 2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi + \\
& + \frac{4}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi)
\end{aligned}
$$

Ceci montre que le spineur $\psi^{1,2}$ donné par

$$
\begin{aligned}
\psi^{1,2} = X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \frac{1}{n+3} (2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi) + \\
+ \frac{2}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi), \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

est un spineur propre pour D avec la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$ pour tout spineur de Killing ψ sur M.

Théorème 5.2.2 *La multiplicité de la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$ est au moins égale à $(k-1)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour $t \in \{1, 2, 3\}$ fixé, l'application linéaire de V^t dans l'espace propre de D pour la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$, donnée par $\psi \mapsto \psi^{1,2}$, est injective.

Soit $\psi \in V^t$ tel que $\psi^{1,2} = 0$. Si, pour $s \in \{1, 2, 3\}$, on dérive (5.3) dans la direction de X_s, on multiplie la même relation par $\frac{1}{2} X_s$ et on additione les résultats, on obtient le système

$$
\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 \cdot X_3 - X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^1 \cdot \psi = 0
$$

$$
\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 - X_3 \cdot X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0
$$

$$
(X_1 + X_2 \cdot X_3) \cdot \Omega^1 \cdot \psi + (X_2 + X_3 \cdot X_1) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0
$$

Si on somme la première equation multipliée par $-X_2$, la deuxième multipliée par $-X_1$, et la troisième equation, on obtient

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot \psi = 0,$$

donc $\psi \in V^t \cap \ker(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) = \{0\}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

Remarques. 1. On a utilisé sans démonstration quelques résultats algébriques sur les spineurs, qui s'obtiennent sans difficulté suivant, par exemple, l'approche de Kirchberg donnée dans ([35]).

2. L'inégalité du théorème 5.2.2 est susceptible d'être améliorée ; en plus par la même méthode on obtient des spineurs propres de D pour la valeur propre $-3 - \frac{n}{2}$, sans pouvoir montrer qu'ils sont non-nuls.

Chapter 6

On Nearly Parallel G_2-Structures

Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec

T. Friedrich, I. Kath et U. Semmelmann, qui est à paraître dans Journal of Geometry and Physics. *Dans ce chapitre on étudie les structures G_2 presque parallèles, dont l'importance vient du fait qu'elles admettent des spineurs de Killing, par la classification de C. Bär. Cette partie peut être lue indépendamment des autres parties de cette thèse.*

RÉSUMÉ. – Une structure G_2 presque parallèle sur une variété riemannienne de dimension 7 est équivalente à l'existence d'une structure spinorielle admettant un spineur de Killing. On présente des résultats généraux sur le groupe d'automorphismes d'une telle structure, et on construit de nouveaux exemples. On classifie toutes les structures G_2 presque parallèles ayant beaucoup d'isométries, et en particulier, celles qui sont homogènes.

ABSTRACT. – A nearly parallel G_2-structure on a 7-dimensional Riemannian manifold is equivalent to a spin structure with a Killing spinor. We prove general results about the automorphism group of such structures and we construct new examples. We classify all nearly parallel G_2-manifolds with large symmetry group and in particular all homogeneous nearly parallel G_2-structures.

CLASSIFICATION AMS. – 53C10, 53C30, 53A50.

MOTS-CLÉS. – G_2-structure, Sasakian manifold, Killing spinor.

6.1 Introduction

A nearly parallel G_2-structure on a 7-dimensional manifold is a 3-form ω^3 of special algebraic type satisfying the differential equation

$$d\omega^3 = -8\lambda(*\omega^3)$$

for some constant $\lambda \neq 0$. The existence of ω^3 is equivalent to the existence of a spin structure with a Killing spinor, i.e. a spinor ψ satisfying

$$\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi, \quad \forall\, X \in TM.$$

In case $\lambda = 0$, ω^3 defines a *geometric* G_2-structure ($d\omega^3 = 0, \delta\omega^3 = 0$). Excluding the case of the 7-dimensional sphere there are three types of nearly parallel G_2-structures depending on the dimension of the space KS of all Killing spinors. Nearly parallel G_2-structures with $\dim(KS) = 3$ are 3-Sasakian manifolds and nearly parallel G_2-structures such that $\dim(KS) = 2$ are Einstein-Sasakian spaces. There are examples of compact nearly parallel G_2-manifolds where the dimension of the space of all Killing spinors equals one and we call such spaces *proper G_2-manifolds*.

Recently D. Joyce [33] solved an open problem in holonomy theory, namely the existence problem of compact 7-dimensional Riemannian manifolds with G_2-holonomy. On the other hand, Boyer / Galicki / Mann [7] constructed new compact examples of 3-Sasakian manifolds and investigated the global geometry of this spaces. In dimension seven, 3-Sasakian manifolds are special nearly parallel G_2-structures and such manifolds have been studied a long time ago (see [22], [13]). However, during the last 10 years, these special Einstein manifolds appeared as Einstein spaces where the Dirac operator has the smallest possible eigenvalue and many compact examples are known since this time (see [12]). The aim of this paper is to revisit once again the results as well as the examples of compact nearly parallel G_2-structures known up to now. Moreover, starting from 3-Sasakian manifold we construct new manifolds with a nearly parallel G_2-structure. A 3-Sasakian manifold admits a second Einstein metric obtained from the given one by scaling the metric in the directions of the orbits of the the *Spin(3)*-action. It turns out that this Einstein metric is a proper G_2-structure and we obtain new nearly parallel G_2-structures from the examples of 3-Sasakian manifolds mentioned above.

Finally we investigate the automorphism group of a compact nearly G_2-manifold and we classify in particular all homogeneous G_2-manifolds. The automorphism group $G = Aut\ (M^7, \omega^3)$ of a nearly parallel G_2-manifold has some special properties. In particular, if $\dim(G) \geq 10$, G acts transitively on M^7. The zero set of infinitesimal automorphisms is either one- or three-dimensional and a four-dimensional orbit of this group-action is of special topological and geometric type. Moreover, the isotropy groups $G(m)$ are subgroups of the exceptional G_2 and one can list them explicitly. Combining all these informations we can classify the compact, nearly parallel G_2-manifolds with a large symmetry group.

6.2 The exceptional group G_2.

The group G_2 is a compact, simple and simply connected 14-dimensional Lie group. In this section we collect some basic algebraic facts about this group. In particular, we will define G_2 as the isotropy group of a real $Spin(7)$-spinor. Since in dimension 7 these spinors correspond to the 3-forms ω^3 of general type in $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)$, this definition of the group G_2 is equivalent to the usual one as the subgroup of $GL(7;\mathbb{R})$ preserving the 3-form in $\mathbb{R}^7$

$$\begin{aligned} \omega_0^3 \;\; = \;\; & e_1 \wedge e_2 \wedge e_7 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 - e_1 \wedge e_4 \wedge e_6 \\ & -e_2 \wedge e_3 \wedge e_6 - e_2 \wedge e_4 \wedge e_5 + e_3 \wedge e_4 \wedge e_7 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7. \end{aligned} \tag{6.1}$$

The advantage of this point of view is that a topological G_2-structure on a 7-dimensional manifold defines a Riemannian metric as well as a spinor field of constant length. We shall use the equivalence between topological G_2-structures and 3-forms of general type and between these and Riemannian metrics together with a unit spinor field many times in our investigations of G_2-structures of special geometrical type.

Let $e_1, ..., e_7$ be the standard orthonormal basis of the Euclidian vector space $\mathbb{R}^7$ and denote by $Cliff(\mathbb{R}^7)$ the real Clifford algebra. We will use the real representation of this algebra on $\Delta_7 := \mathbb{R}^8$ given on its generators by

$$\begin{aligned} e_1 &= E_{18} + E_{27} - E_{36} - E_{45} \\ e_2 &= - E_{17} + E_{28} + E_{35} - E_{46} \\ e_3 &= - E_{16} + E_{25} - E_{38} + E_{47} \\ e_4 &= - E_{15} - E_{26} - E_{37} - E_{48} \\ e_5 &= - E_{13} - E_{24} + E_{57} + E_{68} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_6 = &\quad E_{14} - E_{23} - E_{58} + E_{67} \\ e_7 = &\quad E_{12} - E_{34} - E_{56} + E_{78}\ , \end{aligned}$$

where E_{ij} is the standard basis of the Lie algebra $\mathfrak{so}(8)$:

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & -1 & \cdots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \cdots & 1 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \cdots\ i \\ \\ \cdots\ j \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \vdots & \qquad & \vdots \\ i & & j \end{array} & \end{array}$$

If we restrict this representation onto $Spin(7) \subset Cliff(\mathbb{R}^7)$ we obtain the real spin representation $\kappa : Spin(7) \longrightarrow SO(\Delta_7)$. The group $Spin(7)$ acts transitively on the sphere

$$S(\Delta_7) = \{\|\psi\| = 1\} \subset \Delta_7 = \mathbb{R}^8.$$

We now define the group G_2 as the subgroup of $Spin(7)$ preserving the spinor $\psi_0 :=\ ^t(1, 0, ..., 0)$

$$G_2 = \{g \in Spin(7) \mid g\psi_0 = \psi_0\}.$$

The sphere S^7 is thus diffeomorphic to the homogeneous space $Spin(7)/G_2$ and we obtain from the exact homotopy sequence of this fibration

$$\pi_0(G_2) = 0, \quad \pi_1(G_2) = 0, \quad \pi_2(G_2) = 0, \quad \pi_3(G_2) = \mathbb{Z}.$$

Let us now calculate the Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ of G_2. We identify the Lie algebra of $Spin(7)$ with $\mathfrak{spin}(7) = \{\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j \mid \omega_{ij} \in \mathbb{R}\} \subset Cliff(\mathbb{R}^7)$. The Lie algebra $\mathfrak{g}_2$ is the subalgebra of this algebra containing all elements ω satisfying $\omega \cdot \psi_0 = 0$. Let $\omega = \sum\limits_{i<j} \omega_{ij} e_i e_j$ be any element of $\mathfrak{spin}(7)$. Then $\omega \cdot \psi_0 = 0$ holds iff

$$\begin{gathered} \omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0, \qquad -\omega_{13} + \omega_{24} - \omega_{67} = 0, \qquad -\omega_{14} - \omega_{23} - \omega_{57} = 0, \\ -\omega_{16} - \omega_{25} + \omega_{37} = 0, \qquad \omega_{15} - \omega_{26} - \omega_{47} = 0, \qquad \omega_{17} + \omega_{36} + \omega_{45} = 0, \\ \omega_{27} + \omega_{35} - \omega_{46} = 0. \end{gathered}$$

We consider the universal covering $Spin(7) \longrightarrow SO(7)$ of the special orthogonal group $SO(7)$. Because of $(-1) \notin G_2$, there is an isomorphism from G_2 onto a subgroup of $SO(7)$, which we also denote by G_2. We now describe this group. This will yield a second definition of G_2 using 3-forms on $\mathbb{R}^7$. The key point is a special relation in dimension 7 between real spinors and generic 3-forms.

Let $\psi \in \Delta_7$ a fixed spinor. Then the map

$$\mathbb{R}^7 X \longmapsto X\psi \in \Delta_7$$

is an isomorphism between $\mathbb{R}^7$ and the orthogonal complement of ψ in Δ_7. We observe that for $X, Y \in \mathbb{R}^7$ the spinors ψ and $YX\psi + \langle X, Y\rangle\psi$ are orthogonal to each other. Therefore we can define a (2,1)-tensor A_ψ by

$$YX\psi = -\langle X, Y\rangle\psi + A_\psi(Y, X)\psi. \tag{6.2}$$

A_ψ has the following properties

1. $A_\psi(X, Y) = -A_\psi(Y, X)$
2. $\langle Y, A_\psi(Y, X)\rangle = 0$
3. $A_\psi(Y, A_\psi(Y, X)) = -\|Y\|^2 X + \langle X, Y\rangle Y$.

It defines a 3-form ω^3_ψ by $\omega^3_\psi(X, Y, Z) = \langle X, A_\psi(Y, Z)\rangle$.

Vice versa, a (2,1)-tensor A on $\mathbb{R}^7$ which has the properties 1, 2, 3 defines a 1-dimensional subspace $E(A) = \{\psi \in \Delta_7 \mid YX\psi = -\langle X, Y\rangle\psi + A(Y, X)\psi\}$. Consequently, we obtain a bijection from the projective space $P(\Delta_7) = \mathbb{R}\mathrm{P}^7$ onto the set of 3-forms $\omega^3 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)$ whose tensor A defined by $\omega^3(X, Y, Z) = \langle X, A(Y, Z)\rangle$ has the above mentioned properties.

In particular, if $\psi = \psi_0 := \ {}^t(1, 0, ..., 0)$, then a direct calculation yields $\omega^3_{\psi_0} = \omega^3_0$, where ω^3_0 is given by (6.1).

Let g be an element of $Spin(7)$ and $\pi(g)$ the corresponding element in $SO(7)$. We compare the 3-forms associated to the spinors ψ and $g\psi$ and obtain the equation

$$\omega^3_{g\psi} = (\pi(g^{-1}))^* \omega^3_\psi.$$

The 3-form ω^3_ψ defines the spinor ψ up to a real number. Hence, the image of the group $G_2 \subset Spin(7)$ with respect to $\pi : Spin(7) \longmapsto SO(7)$ equals

$$G_2 = \{A \in SO(7) \mid A^*\omega^3_{\psi_0} = \omega^3_{\psi_0}\}.$$

However, the equation $A^*\omega_0^3 = \omega_0^3$ for $A \in GL(7)$ implies $A \in SO(7)$. See for a proof [9], [52]. Using this, we obtain

$$G_2 = \{A \in GL(7) \mid A^*\omega_0^3 = \omega_0^3\}.$$

Remark 6.2.1 *Similarly, we can investigate the action of $Spin(7)$ on the Stiefel manifolds $V_2(\Delta_7)$ and $V_3(\Delta_7)$ of orthonormal pairs and triples of spinors, respectively. This action is transitive, too. The isotropy group of a fixed pair of spinors is isomorphic to $SU(3)$ and the one of a triple is isomorphic to $SU(2)$.*

Remark 6.2.2 *The $GL(7)$-orbit $\Lambda^3_+(\mathbb{R}^7) := \{A^*\omega_0^3 \mid A \in GL(7)\}$ is an open subset of $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)$ since $\dim \Lambda^3(\mathbb{R}^7) = 35$ and $\dim GL(7) - \dim G_2 = 49 - 14 = 35$. Let α^3 be an element of this orbit, i.e. $\alpha^3 = A^*\omega^3$ for some $A \in GL(7)$. Then α^3 defines an inner product on $\mathbb{R}^7$ by $\langle\ ,\ \rangle_\alpha := A^*\langle\ ,\ \rangle$, an orientation $O_\alpha := A^*(e_1 \wedge ... \wedge e_7)$ and a corresponding Hodge operator $*_\alpha : \Lambda^p(\mathbb{R}^7) \longmapsto \Lambda^{7-p}(\mathbb{R}^7)$.*

Remark 6.2.3 *Let $\psi_1,\ \psi_2 \in \Delta_7$ be spinors of the same length and $\xi \in \mathbb{R}^7$ such that $\xi\psi_1 = \psi_2$. Then we have for the induced 3-forms $\omega_1^3 = \omega_{\psi_1}^3$ and $\omega_2^3 = \omega_{\psi_2}^3$*

$$\omega_2 = -\omega_1 + 2(\xi \lrcorner \omega_1) \wedge \xi.$$

Proof. We use the equations which define the tensors $A_1 = A_{\psi_1}$ and $A_2 = A_{\psi_2}$. From $YX\psi_2 = -\langle Y, X\rangle\psi_2 + A_2(Y,X)\psi_2$ it follows that $YX\xi\psi_1 = -\langle Y, X\rangle\xi\psi_1 + A_1(Y,X)\xi\psi_1$. By the definition of A_1 this is equivalent to

$$\begin{aligned}&-\langle X,\xi\rangle Y\psi_1 - \langle Y, A_1(X,\xi)\rangle\psi_1 + A_1(Y, A_1(X,\xi))\psi_1 = \\ &= -\langle Y, X\rangle\xi\psi_1 - \langle A_2(Y,X),\xi\rangle\psi_1 + A_1(A_2(Y,X),\xi)\psi_1,\end{aligned}$$

or to

$$\begin{aligned}(-\langle X,\xi\rangle Y + A_1(Y, A_1(X,\xi)) + \langle Y, X\rangle\xi - A_1(A_2(Y,X),\xi))\psi_1 = \\ = (\langle Y, A_1(X,\xi)\rangle + \langle A_1(Y,X),\xi\rangle)\psi_1.\end{aligned}$$

Since the Clifford multiplication of real spinors by a vector is antisymmetric we conclude that

$$A_1(Y, A_1(X,\xi)) + \langle Y, X\rangle\xi = A_1(A_2(Y,X),\xi) + \langle X,\xi\rangle Y \quad (6.3)$$

$$\langle Y, A_1(X,\xi)\rangle = \langle A_2(Y,X),\xi\rangle, \quad (6.4)$$

where (6.4) is equivalent to $\omega_1(X,Y,\xi) = \omega_2(X,Y,\xi)$ and to $A_1(X,\xi) = A_2(X,\xi)$.

Let now $X, Y, Z \in \mathbb{R}^7$ be vectors orthogonal to ξ. There exists an $X \in \mathbb{R}^7, X \perp \xi$ such that $Z = A_1(X,\xi) = A_2(X,\xi)$. From equations (6.3) and (6.4) we conclude

$$\begin{aligned}\langle W, A_1(Y,Z)\rangle &= \langle W, A_1(Y, A_1(X,\xi))\rangle = \langle W, A_1(A_2(Y,X),\xi)\rangle = \\ &= \langle W, A_2(A_2(Y,X),\xi)\rangle = -\langle W, A_2(\xi, A_2(Y,X))\rangle,\end{aligned}$$

where the last equation holds because of property 3 of the (2,1)-tensor A_2. Consequently, we get $\omega_1(W,Y,Z) = -\omega_2(W,Y,Z)$. The assertion follows.

■

Now we recall the decomposition of $\Lambda^p(\mathbb{R}^7)$ into irreducible components with respect to the action of G_2.

Proposition 6.2.1

1. $\mathbb{R}^7 = \Lambda^1(\mathbb{R}^7) =: \Lambda^1_7$ *is irreducible.*
2. $\Lambda^2(\mathbb{R}^7) = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$, *where*

$$\begin{aligned}\Lambda^2_7 &= \{\alpha^2 \in \Lambda^2 \mid *(\omega^3 \wedge \alpha^2) = 2\alpha^2\} = \{X \lrcorner\, \omega^3 \mid X \in \mathbb{R}^7\} \\ \Lambda^2_{14} &= \{\alpha^2 \in \Lambda^2 \mid *(\omega^3 \wedge \alpha^2) = -\alpha^2\} = \mathfrak{g}_2\end{aligned}$$

3. $\Lambda^3(R^7) = \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$, *where*

$$\begin{aligned}\Lambda^3_1 &= \{t\omega^3 \mid t \in R^1\} \\ \Lambda^3_7 &= \{*(\omega^3 \wedge \alpha^1) \mid \alpha^1 \in \Lambda^1_7\} \\ \Lambda^3_{27} &= \{\alpha^3 \in \Lambda^3 \mid \alpha^3 \wedge \omega^3 = 0, \alpha^3 \wedge *\omega^3 = 0\}\end{aligned}$$

Proposition 6.2.2 *The wedge product* $\omega^3 \wedge\ : \Lambda^3(\mathbb{R}^7) \longrightarrow \Lambda^6(\mathbb{R}^7)$ *has the following properties with respect to the decomposition* $\Lambda^3(\mathbb{R}^7) = \Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_7 \oplus \Lambda^3_{27}$.

1. $\omega^3 \wedge (\Lambda^3_1 \oplus \Lambda^3_{27}) = 0$
2. *If* $\eta^3 = *(\omega^3 \wedge \alpha^1) \in \Lambda^3_7$, *then* $\omega^3 \wedge \eta^3 = -4 * \alpha^1$.

Similarly, the wedge product $*\omega^3 \wedge\ : \Lambda^2(\mathbb{R}^7) \longrightarrow \Lambda^6(\mathbb{R}^7)$ *has the following properties with respect to the decomposition* $\Lambda^2(\mathbb{R}^7) = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$.

3. $(*\omega^3) \wedge \Lambda^2_{14} = 0$
4. *If* $\alpha^2 = X \lrcorner\, \omega^3 \in \Lambda^2_7$, *then* $(*\omega^3) \wedge \alpha^2 = 3(*X)$.

Next we study the action of the group G_2 on the Grassmannian manifolds $G_2(\mathbb{R}^7)$ and $G_3(\mathbb{R}^7)$ of oriented 2- and 3-dimensional linear subspaces in $\mathbb{R}^7$.

Proposition 6.2.3

1. *G_2 acts transitively on $G_2(\mathbb{R}^7)$.*
2. *G_2 acts on $G_3(\mathbb{R}^7)$ with cohomogeneity one. The principal orbits have dimension 11 and there are two exceptional orbits of dimension 8.*
3. *For any $E^3 \in G^3(\mathbb{R}^7)$ the inequality $|\omega^3(E^3)| \leq 1$ holds . The 3-dimensional subspace E^3 belongs to the exceptional orbit with respect to the G_2-action if and only if $|\omega^3(E^3)| = 1$.*

Proof. $G_2(\mathbb{R}^7) = SO(7)/[SO(2) \times SO(5)]$ is a 10-dimensional manifold. On the other hand, the intersection of the Lie algebras $\mathfrak{g}_2$ and $\mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(5)$ is the 4-dimensional subalgebra of $\mathfrak{so}(7)$ defined by the equations

$$\omega_{1i} = \omega_{2i} = 0 \text{ for } i \geq 3, \quad \omega_{57} = \omega_{37} = \omega_{47} = 0$$

$$\omega_{36} + \omega_{45} = \omega_{35} - \omega_{46} = \omega_{24} - \omega_{67} = 0, \quad \omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0.$$

Hence the G_2-orbit of the standard 2-plane $Span\{e_1, e_2\}$ has dimension 10. Since this orbit is a compact submanifold of $G_2(\mathbb{R}^7)$, it coincides with the Grassmannian manifold.

Fix a 3-dimensional subspace E^3 . Since G_2 acts transitively on $G_2(\mathbb{R}^7)$ in the G_2-orbit through E^3 there exists a 3-dimensional subspace containing the vectors e_1 and e_2. For simplicity we denote this space by E^3, too. The isotropy group of the vectors e_1, e_2 inside G_2 is the group $SU(2)$ acting on $Span\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Therefore we may assume that the third vector of E^3 is given by $\cos(\varphi)e_3 + \sin(\varphi)e_7$. Consequently, any G_2-orbit in $G_3(\mathbb{R}^7)$ contains a subspace of the special form

$$E^3(\varphi) = Span\{e_1, e_2, \cos(\varphi)e_3 + \sin(\varphi)e_7\}.$$

The Lie algebra $\mathfrak{h}(\varphi)$ of the isotropy group of $E^3(\varphi)$ is the 9-dimensional subalgebra of $\mathfrak{so}(7)$ given by the equations

$$\omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{24} = \omega_{25} = \omega_{26} = 0, \quad \omega_{37} = 0,$$

$$\cos(\varphi)\omega_{34}+\sin(\varphi)\omega_{74}=\cos(\varphi)\omega_{35}+\sin(\varphi)\omega_{75}=\cos(\varphi)\omega_{36}+\sin(\varphi)\omega_{76}=0,$$

$$\sin(\varphi)\omega_{13}-\cos(\varphi)\omega_{17}=\sin(\varphi)\omega_{23}-\cos(\varphi)\omega_{27}=0.$$

We calculate the intersection of the Lie algebras $\mathfrak{g}_2$ and $\mathfrak{h}(\varphi)$. It turns out that

$$\dim\,[\mathfrak{g}_2\cap\mathfrak{h}(\varphi)]=\begin{cases} 3 \text{ if } \cos(\varphi)\neq 0\\ 6 \text{ if } \cos(\varphi)=0.\end{cases}$$

Consequently, the G_2-orbit of the space $E^3(\varphi)$ has dimension 11 (if $\cos(\varphi)\neq 0$), or dimension 8 (if $\cos(\varphi)=0$). Moreover, we compute the value $\omega^3(E^3(\varphi))$:

$$\omega^3(E^3(\varphi))=\sin(\varphi).$$

■

Remark 6.2.4 *A 3-dimensional subspace $E^3\subset\mathbb{R}^7$ is said to be G_2-special if its G_2-orbit is an exceptional orbit. The following conditions are equivalent.*

(i) *E^3 is a special G_2-subspace.*

(ii) $|\omega^3(E^3)|=1$

(iii) *For any vectors $X,Y\in E^3$ and $Z\perp E^3$ the relation $\omega^3(X,Y,Z)=0$ holds.*

6.3 Topological and Geometrical G_2-Reductions.

Let M^7 be a 7-dimensional manifold and $R(M^7)$ the frame bundle of M^7. We define the bundle $\Lambda^3_+(M^7)$ by

$$\Lambda^3_+(M^7):=R(M^7)\times_{GL(7)}\Lambda^3_+(\mathbb{R}^7)\subset R(M^7)\times_{GL(7)}\Lambda^3(\mathbb{R}^7)=\Lambda^3(M^7).$$

Definition 6.3.1 *A topological G_2-structure on M^7 is a G_2- reduction of the frame bundle $R(M^7)$, i.e. a subbundle P_{G_2} satisfying*

$$\begin{array}{ccc} G_2 & \hookrightarrow & GL(7)\\ \downarrow & & \downarrow\\ P_{G_2} & \hookrightarrow & R(M^7)\\ \searrow & & \swarrow\\ & M^7 & . \end{array}$$

Similarly we define topological $SU(2)$-, $SU(3)$- and $Spin\,(7)$-structures.

The fact that G_2 is a subset of $SO(7)$ and of $Spin\,(7)$ implies that a G_2-structure P_{G_2} on M^7 induces an orientation of M^7 (i.e. $\omega_1 = 0$), a Riemannian metric g on M^7 such that the corresponding $SO(7)$-bundle equals $P_{G_2} \times_{G_2} SO(7)$, and a spin structure $P_{G_2} \times_{G_2} Spin\,(7)$ (i.e. $\omega_2 = 0$). Furthermore it defines the following nowhere vanishing spinor $\psi \in \Gamma(S)$ in the real spinor bundle $S = P_{G_2} \times_{G_2} \Delta_7$ of M^7. Since $G_2 \subset Spin(7)$ is the isotropy group of $\psi_0 \in \Delta_7$ the map $\psi : P_{G_2} \longrightarrow \Delta_7,\ \psi(p) = \psi_0$, has the property $\psi(pg) = g^{-1}\psi$ for all $g \in G_2$ and is therefore a section in S. Because of the G_2 - invariance of ω_0 the G_2-structure defines in the same way a section ω^3 in $\Lambda^3_+(M^7) = R(M^7) \times_{GL(7)} \Lambda^3_+(\mathbb{R}^7) = P_{G_2} \times_{G_2} \Lambda^3_+(\mathbb{R}^7)$, by $\omega^3 : P_{G_2} \longrightarrow \Lambda^3_+(\mathbb{R}^7),\ \omega^3(p) = \omega^3_0$. On the other hand the spinor ψ defines a (2,1)-tensor field $A = A_\psi$ (see equation (6.2)) on M^7 and we have $\omega^3 = g(\cdot, A(\cdot,\cdot))$.

Proposition 6.3.1 *Let M^7 be a compact 7-dimensional manifold. The following conditions are equivalent.*

(i) *M^7 admits a topological $SU(2)$-structure.*

(ii) *M^7 admits a topological $SU(3)$-structure.*

(iii) *M^7 admits a topological G_2-structure.*

(iv) *M^7 admits a topological $Spin\,(7)$-structure.*

(v) *The first and the second Stiefel - Whitney class of M^7 vanish, i.e. $\omega_1 = 0$ and $\omega_2 = 0$*

Proof. The implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ and the equivalence $(iv) \Leftrightarrow (v)$ are obvious. It remains to show that the existence of a topological $Spin\,(7)$-structure implies the existence of a topological $SU(2)$ - structure. Let S be the real spinor bundle associated to the given $Spin(7)$-structure. Its dimension equals 8, the dimension of M^7 equals 7. Thus, there exists section ψ of length 1 in $\Gamma(S)$. On the other hand, any 7-dimensional orientable compact manifold admits two linearly independent vector fields [57]. Denote these vector fields by X and Y. Then $\psi, X\psi$ and $Y\psi$ are spinor fields, which are linearly independent in any point of M^7. Thus M^7 admits a triple (ψ_1, ψ_2, ψ_3) of spinor fields which are orthogonal in any point. The spinors

ψ_i $(i = 1, 2, 3)$ are maps $\psi_i : P_{Spin} \longrightarrow \Delta_7$ satisfying $\psi_i(pg) = g^{-1}\psi_i(p)$ for all $g \in Spin(7)$. Now we can define a $SU(2)$-structure on M^7 by

$$P_{SU(2)} := \{p \in P_{Spin} \mid \ \psi_1(p) =^t (1, 0, ..., 0),\ \psi_2(p) =^t (0, 1, 0, ..., 0),\ \psi_3(p) = \\ =^t (0, 0, 1, 0, ..., 0)\}.$$

■

Obviously the above mentioned map from the set of G_2 - reductions of $R(M^7)$ into the set of 3-forms is injective. Thus we obtain

Proposition 6.3.2 *There is a one-to-one correspondence between the G_2 - stuctures on M^7 and the sections of $\Lambda^3_+(M^7)$.*

And, similarly

Proposition 6.3.3 *There is a one-to-one correspondence between the G_2-structures on M^7 and the 4-tupels (O, g, P_{Spin}, ψ), where O is an orientation, g a metric, P_{Spin} a spin structure and ψ a spinor field of length 1 on M^7.*

Now we turn to geometrical G_2-stuctures.

Definition 6.3.2 *Let $P_{G_2} \subset R(M^7)$ be a G_2-reduction and g the associated Riemannian metric. We denote by ∇ the Levi-Civita connection of g. P_{G_2} is said to be geometrical if one of the following equivalent conditions is satisfied.*

(i) ∇ *reduces to* P_{G_2}.

(ii) The holonomy group $Hol(M^7, g)$ of M^7 is contained in G_2.

(iii) The associated 3-form ω^3 is parallel, i.e. $\nabla\omega^3 = 0$.

(iii) The associated spinor field ψ is parallel, i.e. $\nabla\psi = 0$ where here ∇ is the induced covariant derivative on the spinor bundle S.

An immediate consequence is the following fact proved by E. Bonan in 1966 (see [5])

Proposition 6.3.4 *If g is the Riemannian metric of a geometrical G_2-structure on M^7 , then (M^7, g) is Ricci-flat, i.e. $Ric = 0$.*

Proof. Let ψ be the associated section of the spinor bundle S of M^7. Because of $\nabla\psi = 0$ we obtain for the curvature tensor $\Re^S$ of the induced connection ∇ on S

$$\Re^S(X,Y)\psi = \nabla_X\nabla_Y\psi - \nabla_Y\nabla_X\psi - \nabla_{[X,Y]}\psi = 0$$

for all vector fields X, Y on M^7. We recall that the Ricci tensor on M^7 satisfies

$$Ric(X)\varphi = -2\sum_{k=1}^{7} s_k \Re^S(X, s_k)\varphi$$

for any vector field X and any spinor φ on M^7, where $s_1, ..., s_7$ is a local orthonormal frame (see [2]). Consequently, $Ric(X)\psi = 0$ for all vector fields X and the assertion follows since ψ vanishes nowhere.

■

Now we can generalize the condition $\nabla\psi = 0$ and obtain the notion of a nearly parallel G_2-structure.

Definition 6.3.3 *A topological G_2-structure on M^7 is said to be nearly parallel if the associated spinor ψ is a Killing spinor, i.e. there exists a real number λ such that ψ satisfies the differential equation*

$$\nabla_X\psi = \lambda X\psi$$

with respect to the Levi-Civita connection of the induced metric.

Differentiating the equation that defines the (2,1)-tensor A we obtain the following equivalent condition.

Proposition 6.3.5 *A topological G_2-structure on M^7 is nearly parallel if and only if the associated tensor A satisfies*

$$(\nabla_Z A)(Y,X) = 2\lambda\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + A(Z, A(Y,X))\} \tag{6.5}$$

with respect to the Levi-Civita connection of the induced metric where λ is the same number as in Definition (6.3.3).

Now we translate this condition into a differential equation for the 3-form ω^3.

Proposition 6.3.6 *A topological G_2-structure on M^7 is nearly parallel if and only if the associated 3-form ω^3 satisfies*

$$\nabla_Z \omega^3 = -2\lambda (Z \lrcorner \ast \omega^3)$$

with respect to the Levi-Civita connection of the induced metric where λ is the same number as in Definition (6.3.3).

Proof. The 3-form ω^3 is defined by $\omega^3(X,Y,Z) = g(X, A(Y,Z))$. Differentiating this equation we observe that the equation (6.5) is equivalent to

$$(\nabla_Z \omega^3)(W,Y,X) = 2\lambda g(Z, g(W,X)Y - g(W,Y)X - A(W, A(Y,X)))$$

for any vector field Z. For fixed Z the 3-form on the right hand side of this equation equals locally

$$2\lambda \sum_{i<j<k} g(Z, g(s_i,s_k)s_j - g(s_i,s_j)e_k - A(s_i, A(s_j,s_k)))s_i \wedge s_j \wedge s_k =$$

$$= -2\lambda \sum_{i<j<k} g(Z, A(s_i, A(s_j,s_k)))s_i \wedge s_j \wedge s_k$$

where $s_1, ..., s_7$ is a section of the G_2-structure on M^7. However, we obtain from

$$\begin{aligned} \omega^3 &= s_1 \wedge s_2 \wedge s_7 + s_1 \wedge s_3 \wedge s_5 - s_1 \wedge s_4 \wedge s_6 \\ &\quad - s_2 \wedge s_3 \wedge s_6 - s_2 \wedge s_4 \wedge s_5 + s_3 \wedge s_4 \wedge s_7 + s_5 \wedge s_6 \wedge s_7. \end{aligned}$$

on one hand all $A(s_i, A(s_j,s_k))$ and on the other hand $\ast\omega^3$. The assertion follows by comparing these terms.

■

In the same way as in the case of geometrical G_2-structures we prove

Proposition 6.3.7 *If g is the Riemannian metric defined by a nearly parallel G_2-structure on M^7 , then (M^7, g) is an Einstein space.*

Proof. The induced spinor ψ is a Killing spinor and we obtain from $\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi$

$$\Re^S(X,Y)\psi = \nabla_X \nabla_Y \psi - \nabla_Y \nabla_X \psi - \nabla_{[X,Y]}\psi = 2\lambda^2 (Y \cdot X + g(X,Y)) \cdot \psi.$$

This yields for the Ricci tensor

$$Ric(X)\psi = -2\sum_{k=1}^{7} s_k \Re^S(X, s_k)\psi = -4\lambda^2 \sum_{k=1}^{7} s_k(s_k X + g(X, s_k))\psi = 24\lambda^2 X\psi$$

Since ψ has no zeros, $Ric(X) = 24\lambda^2 X$ and, therefore, (M^7, g) is an Einstein space of constant scalar curvature $R = 7 \cdot 24\lambda^2$.

■

Next we generalize the following theorem of Gray and Fernandez.

Proposition 6.3.8 *([22], [23], [10]) Let $P_{G_2} \subset R(M^7)$ be a topological G_2-reduction, g its induced metric, ω^3 the induced 3-form and $*$ the Hodge operator. Then the following conditions are equivalent.*

(i) *P_{G_2} is geometrical.*

(ii) $\nabla \omega^3 = 0$

(iii) $d\omega^3 = 0, \quad d * \omega^3 = 0.$

We transfer the proof of this theorem given in ([10]) to the case of nearly parallel G_2-reductions and obtain

Proposition 6.3.9 *Let $P_{G_2} \subset R(M^7)$ be a topological G_2-reduction, g its induced metric, ω^3 the induced 3-form, ψ the induced spinor and $*$ the Hodge operator. Then the following conditions are equivalent.*

(i) *P_{G_2} is nearly parallel, i.e. the spinor ψ satisfies $\nabla_X \psi = \lambda X \psi$.*

(ii) $\nabla_Z \omega^3 = -2\lambda(Z \lrcorner \; * \omega^3)$

(iii) $\delta\omega^3 = 0, \quad d\omega^3 = -8\lambda * \omega^3.$

Proof. The 3-form ω^3 defines the metric g. Let $\Sigma_g \subset \Lambda^3_+(M^7)$ be the set of 3-forms that define this metric, too. The fibre of Σ_g equals the $SO(7)$-orbit of ω^3, i.e. $SO(7)/G_2$. Its tangent space $T(SO(7)/G_2)$ is G_2-invariant and 7-dimensional, therefore $T(SO(7)/G_2) = S_{\omega^3} := \{X \lrcorner \; * \omega^3 \mid X \in TM^7\}$. Since ω^3 is a section in Σ_g and ∇ is a covariant derivative in Σ_g, the covariant derivative $\nabla\omega^3$ is a section of $T^*M^7 \otimes S_{\omega^3}$. We consider now the projection p_1 defined by

$$p_1 : T^*M^7 \otimes S_{\omega^3} \alpha^1 \otimes \alpha^3 \longmapsto \alpha^1 \wedge \alpha^3 \in \Lambda^4$$

and the contraction

$$p_2 : T^*M^7 \otimes S_{\omega^3} \longrightarrow \Lambda^2.$$

By comparing the decomposition of $T^*M^7 \otimes S_{\omega^3}$ and $\Lambda^4 \oplus \Lambda^2$ into irreducible G_2-subspaces we see that the sum of p_1 and p_2

$$p_1 \oplus p_2 : T^*M^7 \otimes S_{\omega^3} \longrightarrow \Lambda^4 \oplus \Lambda^2$$

is injective. Consequently, $\nabla_X \psi = \lambda X \psi$ is equivalent to

$$p_1(\nabla \omega^3) = -2\lambda p_1(\cdot \lrcorner \ * \omega^3) = -2\lambda \sum_{i=1}^{7} s_i \wedge s_i \lrcorner \ * \omega^3 = -8\lambda * \omega^3$$

$$p_2(\nabla \omega^3) = -2\lambda p_2(\cdot \lrcorner \ * \omega^3) = -2\lambda \sum_{i=1}^{7} *\omega^3(s_i, s_i, ...) = 0$$

The assertion now follows from $p_1(\nabla \omega^3) = d\omega^3, \ p_2(\nabla \omega^3) = \delta \omega^3$.

Remark 6.3.1 *There is the following difference between the cases $\lambda = 0$ and $\lambda \neq 0$. We proved that a G_2-structure is nearly parallel if and only if for the induced 3-form ω^3 the equations $\delta \omega^3 = 0, \quad d\omega^3 = -8\lambda * \omega^3$ hold. In case $\lambda = 0$, the resulting equations $d\omega^3 = 0$ and $\delta \omega^3 = 0$ are independent. In case $\lambda \neq 0$, the condition $d\omega^3 = -8\lambda * \omega^3$ implies $\delta \omega^3 = 0$.*

6.4 Nearly Parallel G_2-Structures, Killing Spinors and Contact Geometry.

We summarize now several results on nearly parallel G_2-structures. A general reference is the book [2]. In particular, we derive necessary geometric conditions for the underlying Riemannian metric and we introduce three types of nearly parallel G_2-structures depending on the number of Killing spinors. Finally we discuss the compact examples of each type known up to now.

Let (M^7, g) be a compact Riemannian spin manifold with a Killing spinor ψ,

$$\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi,$$

and denote by ω^3 the corresponding 3-form satisfying the differential equation

$$d\omega^3 = -8\lambda * \omega^3.$$

Then M^7 is an Einstein manifold of positive scalar curvature $R = 4{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}\lambda^2 = 168\lambda^2$ and, consequently, the fundamental group $\pi_1(M)$ is finite. In case $\lambda \neq 0$ the Riemannian manifold (M^7, g) is locally irreducible and not locally symmetric except if it has constant sectional curvature (see [2]). Using the associated nearly parallel G_2-structure we decompose the bundles of forms $\Lambda^p(M^7)$ into the irreducible components mentioned above. The curvature tensor

$$\Re : \Lambda^2 = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14} \quad \longrightarrow \quad \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14} = \Lambda^2$$

splits into the scalar curvature and the Weyl tensor W:

$$\Re = W - \frac{R}{42}.$$

The Weyl tensor satisfies several algebraic equations. They can be formulated in the following way. For any 2-form $\omega^2 \in \Lambda^2$ the Clifford product $W(\omega^2) \cdot \psi$ vanishes, i.e.

$$W(\omega^2) \cdot \psi = 0$$

holds (see [2]). Since Λ^2_{14} is the Lie algebra of the group G_2, being the isotropy group of the spinor ψ, we conclude that the Weyl tensor has the form

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_{14} \end{pmatrix},$$

where $W_{14} : \Lambda^2_{14} \to \Lambda^2_{14}$ is a symmetric endomorphism. In case $W_{14} \neq 0$, the holonomy representation $\mathrm{Hol}^0 \to SO(7)$ is irreducible and we can apply Berger's Holonomy Theorem. Since $\dim(M^7) = 7$, there are two possibilities: $\mathrm{Hol}^0 = G_2$ or $\mathrm{Hol}^0 = SO(7)$. The case of $\mathrm{Hol}^0 = G_2$ cannot occur since M^7 is an Einstein space with positive scalar curvature ($\lambda \neq 0$). Consequently, the Riemannian manifold M^7 is - at least from the point of view of holonomy theory - of general type: $\mathrm{Hol}^0 = SO(7)$. Since the fundamental group of M^7 is finite we can without loss of generality assume that M^7 is simply-connected, $\pi_1(M^7) = 0$. Furthermore, we exclude the case of the space of constant curvature, i.e. $M^7 \neq S^7$. Denote by $KS(M^7, g)$ the space of all Killing spinors,

$$KS(M^7, g) = \{\psi \in \Gamma(S) : \ \nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi \text{ for all vectors } X \in T(M^7)\}$$

The dimension of $KS(M^7, g)$ is bounded by three, $\dim\,[KS(M^7, g)] \leq 3$ (see [2]). The nearly parallel G_2-structures split into three different types:

– **nearly parallel G_2-structures of type 1:** $\dim[KS] = 1$.
(proper G_2-structures)

– **nearly parallel G_2-structures of type 2:** $\dim[KS] = 2$.

– **nearly parallel G_2-structures of type 3:** $\dim[KS] = 3$.

The nearly parallel G_2-structures of type 2 and 3 are described using the language of contact geometry. In fact, Th. Friedrich and I. Kath observed that a simply-connected 7-dimensional Riemannian spin manifold with scalar curvature $R = 42$ admits at least

$$\text{two Killing spinors} \iff M^7 \text{ is an Einstein-Sasakian manifold}$$

$$\text{three Killing spinors} \iff M^7 \text{ is a 3-Sasakian manifold}$$

(see [16]; for the definition of a Sasakian manifold also see next section). For the G_2-structures of type 1 we also use the notion of a *proper G_2-structure.*

Examples of nearly parallel G_2-structures of type three (i.e. 3-Sasakian manifolds) are known. We have the sphere S^7, the space $N(1,1) = SU(3)/S^1$ and these are the only regular 3-Sasakian manifolds in dimension seven (see [16]). During the last years Boyer / Galicki / Mann obtained non-regular examples $S(p_1, p_2, p_3)$, (see [7], [8]). Up to now, strong topological conditions for a compact 7-dimensional manifold M^7 in order to admit a 3-Sasakian structure are not known. For example, it seems to be an open question whether the manifold $S^2 \times S^5$ posseses such a structure or not! This special question is interesting since a 7-dimensional manifold with 3-Sasakian structure and being the product of two lower-dimensional manifolds must be diffeomorphic to $S^2 \times S^5$.

Examples of nearly parallel G_2-structures of type 3 (3-Sasakian manifolds)

M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	$\dim[\mathrm{Iso}]$
$N(1,1)$	$SU(3) \times SU(2)$	11
$S(p_1, p_2, p_3)$	depends on p_i	< 8

Nearly parallel G_2-structures of type two (i.e. Einstein Sasakian manifolds) can be obtained as principal S^1-bundles over 6-dimensional Kähler-Einstein manifolds with positive scalar curvature. Indeed, let X^6 be a

Kähler-Einstein manifold with positive scalar curvature and denote by $c_1(X^6)$ its first Chern class. Let $A > 0$ be the largest integer such that $c_1(X^6)/A$ is an integral cohomology class. Consider the principal S^1-bundle $S^1 \to M^7 \to X^6$ with Chern class $c_1^* = c_1(X^6)/A$. Then M^7 is simply-connected and admits an Einstein-Sasakian structure. Using the described construction we obtain the following regular Einstein-Sasakian manifolds:

Examples of nearly parallel G_2-structures of type 2 (Einstein Sasakian manifolds)

X^6	M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	dim[Iso]
$F(1,2)$	$N(1,1)$	$SU(3) \times SU(2)$	11
$S^2 \times S^2 \times S^2$	$Q(1,1,1)$	$SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1)$	10
$\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \times S^2$	$M(3,2)$	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	12
$G_{5,2}$	$V_{5,2}$	$SO(5) \times U(1)$	11
$P_k \times S^2$	$M_k^7\ (3 \leq k \leq 8)$	$SO(3) \times U(1)$	4

where P_k $(3 \leq k \leq 8)$ denotes one of the del Pezzo surfaces with a Kähler-Einstein metric of positive scalar curvature. The spaces $N(1,1)$, $Q(1,1,1)$, $M(3,2)$ and the Stiefel manifold $V_{5,2}$ are homogeneous spaces together with some invariant Einstein metric. The table contains also the isometry group of the Einstein-Sasakian manifold M^7 as well as its dimension (see [12]).

There are three examples of nearly parallel G_2-structures of type 1, i.e. proper G_2-structures. The first example is the so-called squashed 7-sphere. Indeed, the standard sphere (S^7, g_{can}) is a Riemannian submersion over the projective space $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ with fibre S^3. Scaling the canonical metric in the fibre S^3, there exists a second scaling factor such that the metric g_1 on S^7 is an Einstein metric. It turns out that (S^7, g_1) admits exactly one Killing spinor. The second example is the homogeneous space $N(k,l) = SU(3)/S^1_{k,l}$ where the embedding of the group $S^1 = U(1)$ into $SU(3)$ is given by

$$S^1 z \longmapsto diag\ (z^k, z^l, z^{-(k+l)}) \in SU(3).$$

These spaces have two homogeneous Einstein metrics. In case $(k,l) = (1,1)$ one of these Einstein metrics is the 3-Sasakian structure mentioned above and the second Einstein metric admits one Killing spinor. In case $(k,l) \neq (1,1)$, there exists only one Killing spinor for each of these two metrics, i.e. the nearly parallel G_2-structure is of type 1 (a proper G_2-structure). The third example is a special Riemannian metric on $SO(5)/SO(3)$ with one Killing spinor (see [9]). The isotropy representation of this space is the unique 7-dimension irreducible representation of the group $SO(3) \to G_2 \subset SO(7)$.

Examples of nearly parallel G_2-structures of type 1

M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	dim [Iso]
(S^7, g_{squas})	$Sp(2) \times Sp(1)$	13
$N(k,l), (k,l) \neq (1,1)$	$SU(3) \times U(1)$	9
$SO(5)/SO(3)$	$SO(5)$	10

Remark 6.4.1

As we mentioned before, strong topological obstructions for the existence of a 3-Sasakian metric on a compact 7-dimensional spin manifold are not known (very recently, the obstruction $b_3(M^7) = 0$ was found, see [17]). The same situation happens in case of an Einstein-Sasakian metric with positive scalar curvature. This gives rise to the following question:

Do there exist compact, simply-connected spin manifolds M^7 with a nearly parallel G_2-structure of type 1 (resp. 2) which cannot admit - for example for topological reasons - any Einstein-Sasakian (resp. 3-Sasakian) metric at all?

6.5 New Examples

In this section we construct new examples of nearly parallel G_2-structures and show that they are of type 1, i.e. they are proper G_2-structures. Let us recall the definition of a Sasakian structure.

Definition 6.5.1 *A vector field V on a Riemannian manifold (M, g) is called a Sasakian structure if the following conditions are satisfied:*

1. V is a Killing vector field of unit length;

2. The (1,1)-tensor φ defined by $\varphi = -\nabla V$ is an almost complex structure on the distribution orthogonal to V ($\varphi^2 = -1$ and $\varphi = -\varphi^*$ on $V^\perp$);

3. $(\nabla_X \varphi) Y = g(X,Y)\, V - g(V,Y)\, X, \quad$ for all vectors X, Y.

Definition 6.5.2 *A triple (V_1, V_2, V_3) is called a 3-Sasakian structure on M if the following conditions are satisfied:*

1. The vector V_i defines a Sasakian structure for each $i = 1, 2, 3$;

2. The frame (V_1, V_2, V_3) is orthonormal;

3. For each permutation (i, j, k) of signature δ, we have $\nabla_{V_i} V_j = (-1)^\delta\ V_k$;

4. On the distribution orthogonal to (V_1, V_2, V_3), the tensors $\varphi_i = -\nabla V_i$ satisfy $\varphi_i\, \varphi_j = (-1)^\delta\, \varphi_k$.

Consider a Riemannian manifold M^7 of dimension 7, admitting a 3-Sasakian structure. A vector is called *horizontal* if it is orthogonal to each V_i and *vertical* if it is a linear combination of V_i. Define, for $s > 0$, the metric g^s on M^7 by $g^s(X,Y) = g(X,Y)$ if X (or Y) is horizontal, and $g^s(V,W) = s^2\, g(V,W)$ for vertical V, W.

A straightforward computation gives the following

Lemma 6.5.1 *The manifold (M^7, g^s) is Einstein if and only if $s = 1$ or $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$.*

The 3-Sasakian manifold (M^7, g^1) admits, by definition, a nearly parallel G_2-structure of type 3. On the other hand, by Proposition 3.10, every nearly parallel G_2-structure on M defines an Einstein metric. Hence, the manifold (M^7, g^s) with $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$ is a natural candidate for a nearly parallel G_2-structure. Indeed, we have

Theorem 6.5.1 *The manifold (M^7, g^s) admits a nearly parallel G_2-structure for $s = \frac{1}{\sqrt{5}}$.*

Proof. Fix $s > 0$ and a local orthonormal frame $X_1, \ldots, X_4$ of the horizontal distribution. Let Z_a ($a = 1, 2, 3$) be the vector $Z_a := V_a / s$ and denote by ∇ the Levi-Civita connection of the metric $g = g^1$. We define a 3-form ω by

$$\omega := F_1 + F_2$$

where $F_1 := Z_1 \wedge Z_2 \wedge Z_3$, $F_2 := \sum_a Z_a \wedge \omega_a$ and $\omega_a := \frac{1}{2}\sum_i X_i \wedge \nabla_{X_i} V_a$.

The 3-form ω is clearly in $\Lambda^3_+(M^7)$. Denote by $*$ the Hodge operator with respect to the metric g^s. Then we calculate the forms $*F_1$ and $*F_2$:

$$6 * F_1 = \sum_a \omega_a \wedge \omega_a \ , \quad *F_2 = Z_1 \wedge Z_2 \wedge \omega_3 + Z_2 \wedge Z_3 \wedge \omega_1 + Z_3 \wedge Z_1 \wedge \omega_2.$$

A straightforward computation yields the formulas

$$dZ_1 = 2s\omega_1 - \frac{2}{s} Z_2 \wedge Z_3 \, , \quad dZ_2 = 2s\omega_2 - \frac{2}{s} Z_3 \wedge Z_1 \, , \quad dZ_3 = 2s\omega_3 - \frac{2}{s} Z_1 \wedge Z_2$$

and $\qquad dF_1 = d(Z_1 \wedge Z_2 \wedge Z_3) = 2s(*F_3)$.

Now we compute

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(\frac{1}{2s} dZ_1 + \frac{1}{s^2} Z_2 \wedge Z_3) = \frac{1}{s^2}(dZ_2 \wedge Z_3 - Z_2 \wedge dZ_3) \\ &= \frac{2}{s}(\omega_2 \wedge Z_3 - \omega_3 \wedge Z_2) \end{aligned}$$

$$d\omega_2 = \frac{2}{s}(\omega_3 \wedge Z_1 - \omega_1 \wedge Z_3) \quad , \quad d\omega_3 = \frac{2}{s}(\omega_1 \wedge Z_2 - \omega_2 \wedge Z_1)$$

and $$dF_2 = \sum_a dZ_a \wedge \omega_a - \sum_a Z_a \wedge d\omega_a = 12s(*F_1) + \tfrac{2}{s}(*F_2).$$

Finally we obtain $d\omega = d(F_1 + F_2) = 12s(*F_1) + (2s + \frac{2}{s})(*F_2)$. So $d\omega$ is a scalar multiple of $*\omega$ if and only if $12s = 2s + \frac{2}{s}$.

■

As remarked in Section 4, the only known examples of proper nearly parallel G_2-structures - up to now - are the squashed 7-sphere, the Wallach spaces $N(k,l)$ and an Einstein metric on $SO(5)/SO(3)$ related to the irreducible representation $SO(3) \to G_2 \to SO(7)$. The importance of Theorem 5.4 can thus be seen in the light of the following result:

Theorem 6.5.2 *The nearly parallel G_2-structures constructed in Theorem 5.4 are proper.*

Proof: Suppose that a constant multiple k of the metric g^s on M^7 admits an Einstein Sasakian structure given by the Killing vector field ξ. Denote by $\Re$ the curvature tensor of (M^7, g) and by $\Re^0$ the curvature tensor of (M^7, kg^s). Then we obtain from Lemma 4 of [2], page 78:

$$g^s(\Re^0(X,Y)\xi, V_a) = k[g^s(Y,\xi)g^s(X,V_a) - g^s(X,\xi)g^s(Y,V_a)] \ . \quad (*)$$

Choosing X and Y horizontal we obtain

$$g^s(\Re^0(X,Y)\xi, V_a) = 0.$$

On the other hand, comparing the Levi-Civita connection ∇ of the metric g with the Levi-Civita connection ∇^0 of the metric g^s we calculate

$$\Re^0(X,Y)V_a = s^2\Re(X,Y)V_a + (s^2-1)\nabla_{[X,Y]^V}V_a = (s^2-1)\nabla_{[X,Y]^V}V_a, .$$

Here we applyed the same lemma for V_a as Sasakian structure on (M^7, g). Consequently, ξ is perpendicular to all vectors of the form $\nabla_{[X,Y]^V}V_a$. It is easy to see that the set of all these vectors is just the vertical distribution, so ξ is horizontal. Next, taking $X = V_1, a = 2$ and Y horizontal in the equation $(*)$, one obtains

$$g^s(\Re^0(V_1,Y)\xi, V_2) = 0. \quad (**)$$

The vector $[Y, V_1]$ is a horizontal one and we can calculate

$$\Re^0(V_1,Y)V_2 = \nabla^0_{V_1}\nabla^0_Y V_2 - \nabla^0_Y\nabla^0_{V_1}V_2 - \nabla^0_{[V_1,Y]}V_2 =$$

$$= s^2(\nabla^0_{V_1}\nabla_Y V_2 - \nabla_{V_1}\nabla_Y V_2) + s^2\Re(V_1,Y)V_2 = s^2(\nabla^0_{V_1}\nabla_Y V_2 - \nabla_{V_1}\nabla_Y V_2)$$

by similar arguments. Now $\nabla_Y V_2$ runs through all horizontal vector fields when Y is horizontal. Together with $(**)$ we obtain that ξ is perpendicular to all vectors of the form $\nabla^0_{V_1}Z - \nabla_{V_1}Z$. The relation

$$\nabla^0_{V_1}Z - \nabla_{V_1}Z = (\nabla^0_{V_1}Z - [Z,V_1]) - (\nabla_{V_1}Z - [Z,V_1]) = (s^2-1)\nabla_Z V_1$$

shows that ξ is also perpendicular to all horizontal vectors, a contradiction.

■

Our new examples of nearly parallel G_2-structures are all proper. The recent work of C. Boyer, K. Galicki, B. Mann [8] provides a multitude of new examples of strongly inhomogeneous 7-manifolds admitting a 3-Sasakian structure. By our previous theorems, they generate the first examples of strongly inhomogeneous proper nearly parallel G_2-structures. However, these examples arise from a deformation of the 3-Sasakian structure and therefore they live on manifolds with 3-Sasakian metric.

As K. Galicki pointed out to us, he also proved the result of Theorem 5.4 in a joint paper with S. Salamon (in preparation).

6.6 The Automorphism Group of a Nearly Parallel G_2-Structure.

We consider a compact, 7-dimensional manifold M^7 with a nearly parallel G_2-structure and denote by ω^3 its 3-form. Then we have the differential equations

$$\nabla_X\omega^3 = -2\lambda(X \lrcorner \ *\omega^3)\ ,\ d\omega^3 = -8\lambda * \omega^3\ ,\ \lambda \neq 0.$$

Let X be a vector field preserving the 3-form, i.e.

$$L_X\omega^3 = d(X \lrcorner\, \omega^3) + X \lrcorner\, d\omega^3 = d(X \lrcorner\, \omega^3) - 8\lambda(X \lrcorner \ *\omega^3) = 0.$$

In particular, X is a Killing vector field of the Riemannian metric g and $\nabla X \in \Gamma(T \otimes T)$ is anti-symmetric and coincides - up to a multiple - with the exterior derivative of the 1-form X:

$$\nabla X = \frac{1}{2}dX.$$

We now calculate the form $d(X \lrcorner\, \omega^3)$ using the differential equation for ω^3:

$$d(X \lrcorner\, \omega^3)(\alpha,\beta,\gamma) = (\nabla_\alpha\omega^3)(X,\beta,\gamma) - (\nabla_\beta\omega^3)(X,\alpha,\gamma) + (\nabla_\gamma\omega^3)(X,\alpha,\beta) +$$

$$+\omega^3(\nabla_\alpha X,\beta,\gamma) - \omega^3(\nabla_\beta X,\alpha,\gamma) + \omega^3(\nabla_\gamma X,\alpha,\beta) =$$

$$= 6\lambda(*\omega^3)(X,\alpha,\beta,\gamma) + \omega^3(\nabla_\alpha X,\beta,\gamma) - \omega^3(\nabla_\beta X;\alpha,\gamma) + \omega^3(\nabla_\gamma X,\alpha,\beta).$$

The equation $d(X \lrcorner\, \omega^3) - 8\lambda(X \lrcorner \ *\omega^3) = 0$ becomes:

$$2\lambda(X \lrcorner \ *\omega^3)(\alpha,\beta,\gamma) = \omega^3(\nabla_\alpha X,\beta,\gamma - \omega^3(\nabla_\beta X,\alpha,\gamma) + \omega^3(\nabla_\gamma X,\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\omega^3(\alpha \lrcorner\, dX,\beta,\gamma) - \omega^3(\beta \lrcorner\, dX,\alpha,\gamma) + \omega^3(\gamma \lrcorner\, dX,\alpha,\beta)\}.$$

We apply now the following easy algebraic observation:

Lemma 6.6.1 *Let η^2 be a 2-form and denote by $\pi_7(\eta^2)$ its Λ^2_7-component with respect to the decomposition $\Lambda^2 = \Lambda^2_7 \oplus \Lambda^2_{14}$. Suppose that $\pi_7(\eta^2)$ is given by a vector Z, i.e. $\pi_7(\eta^2) = Z \lrcorner\, \omega^3$. Then*

$$\omega^3(\alpha \lrcorner \eta^2, \beta, \gamma) - \omega^3(\beta \lrcorner \eta^2, \alpha, \gamma) + \omega^3(\gamma \lrcorner \eta^2, \alpha, \beta) = 3(Z \lrcorner * \omega^3)(\alpha, \beta, \gamma).$$

The condition that the vector field X preserves the 3-form becomes equivalent to

$$2\lambda(X \lrcorner * \omega^3) = \frac{1}{2} \cdot 3(Z \lrcorner * \omega^3)$$

where $\pi_7(dX) = Z \lrcorner \omega^3$. This implies $Z = \frac{4}{3} \cdot \lambda \cdot X$ and consequently we have proved

Theorem 6.6.1 *A nearly parallel G_2-structure ω^3 is preserved by a Killing vector field X if and only if*

$$\pi_7(dX) = \frac{4}{3} \cdot \lambda \cdot (X \lrcorner \omega^3).$$

We now use Stokes Theorem as well as the identities given in the Propositions 2.4 and 2.5 in order to obtain the following relation between the L^2-norms $|\cdot|$ of X and the Λ^2_{14}-part $\pi_{14}(dX)$ of dX:

Theorem 6.6.2 *Let X be a Killing vector field preserving a nearly parallel G_2-structure ω^3 on a closed manifold M^7. Then*

$$\frac{128}{3}\lambda^2|X|^2 = |\pi_{14}(dX)|^2.$$

Proof: We start with the algebraic identity $dX \wedge dX \wedge \omega^3 = 2|\pi_7(dX)|^2 - |\pi_{14}(dX)|^2$ which is valid for any 2-form $\eta(= dX)$. By Stokes Theorem and Propositions 2.4 and 2.5 we obtain

$$\begin{aligned}
\int dX \wedge dX \wedge \omega^3 &= \int X \wedge dX \wedge d\omega^3 = -8\lambda \int X \wedge dX \wedge (*\omega^3) \\
&= -8\lambda \int X \wedge \pi_7(dX) \wedge (*\omega^3) \\
&= -\frac{32}{3}\lambda^2 \int X \wedge (X \lrcorner \omega^3) \wedge (*\omega^3) \\
&= -32\lambda^2 \int X \wedge (*X) = -32\lambda^2|X|^2.
\end{aligned}$$

Therefore we get

$$2|\pi_7(dX)|^2 - |\pi_{14}(dX)|^2 = -32\lambda^2|X|^2.$$

Using the equation $\pi_7(dX) = \frac{4}{3} \cdot \lambda \cdot (X \lrcorner\, \omega^3)$, we have

$$|\pi_7(dX)|^2 = \frac{16}{3}\lambda^2|X|^2,$$

and the formula follows immediately. ■

Consider a component $\Sigma \subset M^7$ of the zero set of X. Since X is a Killing vector field, Σ is a totally geodesic submanifold of even codimension. Suppose that $\dim[\Sigma] = 5$. Then at any point of Σ we obtain that $0 \neq dX \in \Lambda^2_{14}$ has rank 2 ($\pi_7(dX) = 0!$). This implies $dX \wedge dX = 0$. On the other hand, since $dX \in \Lambda^2_{14}$ we have $dX \wedge dX \wedge \omega^3 = -|dX|^2$ (see the definition of the space Λ^2_{14}), a contradiction. This yields the

Corollary 6.6.1 *Any connected component of the zero set of a Killing vector field X preserving a nearly parallel G_2-structure ω^3 has dimension one or three.*

We investigate now the geometry of the 3-dimensional components of the zero set Σ.

Theorem 6.6.3 *Let $\Sigma^3 \subset M^7$ be a three-dimensional component of the zero set of a Killing vector field preserving a nearly parallel G_2-structure. Then*

(i) the tangent spaces $T(\Sigma^3) \subset T(M^7)$ are G_2-special, i.e. the restriction of ω^3 to Σ^3 is the volume form of Σ^3.

(ii) Σ^3 is a space form of positive sectional curvature $K = \frac{R}{42}$.

Proof: The equation $X \lrcorner\, d\omega^3 + d(X \lrcorner\, \omega^3) = 0$ yields at any point $m \in \sum^3$ and for any three vectors $\alpha, \beta, \gamma \in T_m(M^7)$ the relation

$$0 = d(X \lrcorner\, \omega^3)(\alpha, \beta, \gamma) = \omega^3(\nabla_\alpha X, \beta, \gamma) - \omega^3(\nabla_\beta X, \alpha, \gamma) + \omega^3(\nabla_\gamma X, \alpha, \beta).$$

Let $e_1, e_2, \ldots, e_7$ be a local orthonormal frame in the G_2-bundle such that $e_1(m)$ and $e_2(m)$ belong to the tangent space $T_m(\Sigma^3)$. There exists a frame with the required property since the group G_2 acts transitively on the Grassmannian manifold $G_2(R^7)$. With respect to

$$\nabla_{e_1} X = \nabla_{e_2} X = 0$$

we obtain $(\beta = e_1, \gamma = e_2)$ $\omega^3(\nabla_\alpha X, e_1, e_2) = 0$. The vectors $\nabla_\alpha X$, $\alpha \in T_m(M^7)$, generate the normal space of $T_m(\Sigma^3)$ and, therefore, the latter equation means that the subspace $T_m(\Sigma^3) \subset T_m(M^7)$ is of special G_2-type (see Proposition 2.6). In particular, the vector e_7 is the third vector tangent to Σ^3 at the point $m \in \Sigma^3$. The 2-forms

$$e_2 \wedge e_7 + e_3 \wedge e_5 - e_4 \wedge e_6\,, \quad e_1 \wedge e_7 + e_3 \wedge e_6 + e_4 \wedge e_5\,, \quad e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6$$

are elements of Λ^2_7. The curvature tensor $\Re$ of M^7 acts on forms of the type Λ^2_7 by the scalar multiplication by $-\frac{R}{42}$ (see Section 4). This implies

$$\Re(e_2 \wedge e_7 + e_3 \wedge e_5 - e_4 \wedge e_6) = -\frac{R}{42}(e_2 \wedge e_7 + e_3 \wedge e_5 - e_4 \wedge e_6)$$

and, finally, $R_{2772} = \frac{R}{42}$ because Σ^3 is a totally geodesic submanifold (i.e. $R_{3527} = R_{4627} = 0$ for example). Similarly we obtain $R_{1771} = R_{1221} = \frac{R}{42}$ and, hence, Σ^3 is a space form of positive sectional curvature $K = \frac{R}{42}$.

■

Let $H \subset G = Aut\ (M^7, \omega^3)$ be a subgroup of the connected component G of the automorphism group of a nearly parallel G_2-structure $(\lambda \neq 0)$ and suppose that for some point $m^* \in M^7$ the H-orbit $N^4 = H \cdot m^*$ is a four-dimensional submanifold. Then $(*\omega^3)$ is an H-invariant 4-form on N^4, i.e. a constant multiple of the volume form of N^4. On the other hand, we have

$$(-8\lambda) \int\limits_{N^4} (*\omega^3) = \int\limits_{N^4} d\omega^3 = 0$$

and, thus, $*\omega^3$ vanishes on N^4. This implies that ω^3 vanishes on the normal bundle $T^\perp(N^4)$. Using Proposition 2.6 we obtain a local frame $e_1, e_2, \ldots, e_7$ in the G_2-bundle over N^4 such that e_4, e_5, e_6, e_7 Span the tangent space $T(N^4)$ of N^4. Moreover, on N^4 the formula

$$\omega^3|_{N^4} = e_5 \wedge e_6 \wedge e_7$$

holds, i.e. $\omega^3|_{N^4}$ is a 3-form on N^4 of length one. Denote by ξ the tangent vector field on N^4 corresponding to this 3-form under the Hodge operator of N^4 $(\xi = e_4)$. Then we have

$$\xi \lrcorner\, \omega^3 = 0\,, \quad dN^4 = \xi \wedge \omega^3.$$

The 3-form ω^3 is invariant under the flow of the vector field ξ on N^4:

$$L_\xi(\omega^3) = \xi \lrcorner\, d\omega^3 + d(\xi \lrcorner\, \omega^3) = -8\lambda(\xi \lrcorner\, *\omega^3) + 0 = 0.$$

We summarize the result in the following

Theorem 6.6.4 *Let $N^4 = H \cdot m^*$ be a four-dimensional orbit, $H \subset G = Aut\ (M^7, \omega^3)$. Then the restriction of ω^3 to N^4 is a 3-form on N^4 with length one. Moreover, there exists a vector field ξ such that*

(i) $\xi \lrcorner\, \omega^3 = 0\,,\ dN^4 = \xi \wedge \omega^3$;

(ii) $L_\xi(\omega^3) = 0$.

In particular, the Euler characteristic $\chi(N^4)$ of N^4 vanishes, $\chi(N^4) = 0$.

Corollary 6.6.2 *The isotropy representation $G(m) \to GL(T_m(M^7))$ at any point $m \in N^4$ of a four-dimensional orbit N^4 decomposes into a 1-dimensional and two 3-dimensional representations.*

Denote by $G = Aut\ (M^7, \omega^3)$ the connected component of the automorphism group of the nearly parallel G_2-manifold. The isotropy subgroup $G(m)$ of any point $m \in M^7$ is a subgroup of G_2. Thus, we obtain

$$\dim(G) - \dim(G(m)) \leq 7, \quad G(m) \subset G_2.$$

Theorem 6.6.5 *Let (M^7, ω^3) be a simply-connected, compact manifold admitting a nearly parallel G_2-structure not isometric to the sphere S^7. Then the automorphism group G has dimension ≤ 13.*

Proof. First we discuss the case of $15 \leq \dim\ (G)$. Then the isotropy subgroup $G(m)$ is a subgroup of G_2 with $8 \leq \dim\ (G(m))$. However, the group G_2 contains only two subgroups satisfying this condition, namely $G(m) = SU(3)$ and G_2 (see [13]). If $G(m) = G_2$ for any point $m \in M^7$, the Weyl tensor vanishes identically and the space M^7 is the sphere S^7. Suppose that there exists a point $m \in M^7$ such that $G(m) = SU(3)$. Then the group G acts transitively on M^7. Moreover, G is a simply-connected, compact group of dimension 15 containing a subgroup isomorphic to $SU(3)$.

The classification of compact groups yields that there exists only one group with these properties, namely $G = SU(4)$. The Riemannian metric on M^7 is given by an $SU(3)$-invariant scalar product of $\mathbb{R}^7 = \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{R}^1$. The family of $SU(3)$-invariant scalar products depends on one positive parameter, but only the usual scalar product in $\mathbb{R}^7$ defines an Einstein metric on the homogeneous space $M^7 = SU(4)/SU(3)$. Consequently, M^7 is isometric to the sphere S^7.

Next we study the case of dim $(G) = 14$. Then $7 \leq$ dim $(G(m))$ for any point $m \in M^7$. The group G_2 does not contain a subgroup of dimension 7 (see [13]) and therefore we obtain again $G(m) = SU(3)$ or G_2. The case $G(m) = G_2$ for any point $m \in M^7$ is impossible. Suppose $G(m) = SU(3)$ for some point. Then G is a compact group of dimension 14 containing a subgroup isomorphic to $SU(3)$. Moreover, G acts on M^7 with cohomogeneity one. Since M^7 is simply-connected, there exists a point $m_0 \in M^7$ such that $G(m_0) = G$. Then G is isomorphic to G_2. In a neighbourhood of this point the Einstein metrics is a warped product metric $dr^2 \oplus f(r)g_0$, where g_0 is a G_2-invariant metric on the sphere $G_2/SU(3) = S^6$. Since the metric is regular at the point m_0, M^7 is a space of constant sectional curvature (see [3]).

$\blacksquare$

Theorem 6.6.6 *Let (M^7, ω^3) be a simply-connected, compact manifold admitting a nearly parallel G_2-structure not isometric to the sphere S^7. Then the group $SU(3)$ cannot occur as an isotropy subgroup $G(m) \subset Aut\ (M^7, \omega^3)$.*

Proof The isotropy group $G(m)$ of an arbitrary point $m \in M^7$ is a subgroup of G_2. Suppose that it is isomorphic to $SU(3)$ for one point $m \in M^7$. The isotropy representation $G(m) \to SO(T_m(M^7))$ is the standard representation of $SU(3)$ in $SO(7)$. The possible dimensions of $G(m)$-invariant subspaces $V \subset T_m(M^7)$ are 0, 1, 6 and 7. The tangent space $T_m(N)$ of the orbit $N = G \cdot m = G/G(m)$ defines a $G(m)$-invariant subspace. Consequently, we obtain four possibilities

a) $G = G(m) = SU(3)$,
b) dim $(G) = 9$ and $G(m) = SU(3)$,
c) dim $(G) = 14$,
d) dim $(G) = 15$.

In case $\dim(G) = 14$ or 15, M^7 is isometric to the sphere S^7. If $\dim(G) = 9$, the automorphism group G is (locally) isomorphic to $G = SU(3) \times U(1)$. Denote by X the Killing vector field corresponding to the $U(1)$-action. Suppose that X has a zero point m^* and consider the orbit N through m^*. Then X vanishes at every point of N and therefore by Theorem 4, N is a 1- or 3-dimensional submanifold. The group $SU(3)$ acts on N as a group of isometries and we obtain an isomomorphism $SU(3) \to \mathrm{Iso}(N)$. The compact group $\mathrm{Iso}(N)$ is isomorphic to $U(1)$ (in case $\dim(N) = 1$) or to $SO(4)$ (in case $\dim(N) = 3$). Since any two- or four-dimensional real representation of the group SU(3) is trivial, we conclude that G acts trivially on N. Hence, G is a 9-dimensional subgroup of G_2, a contradiction. Consequently, the Killing vector field X corresponding to the $U(1)$-action has constant length 1. Next we prove that the $U(1)$-action on M^7 is a free action. Indeed, for any point m^* the isotropy subgroup $G(m^*)$ of $G = SU(3) \times U(1)$ has the dimension bounded by $\dim\,(G) - 7 = 2 \leq \dim\,(G(m^*))$. In case $\dim\,(G(m^*)) = 2$, the group G acts transitively on M^7 and then the isotropy group $G(m) = SU(3)$ cannot occur. Hence, $G(m^*) = G_1 \times \mathbb{Z}_p \subset SU(3) \times U(1)$ is a group of dimension at least 3. There are only two possibilities: $G_1 = SU(2)$ or $G_1 = SU(3)$. In both cases we get a $\mathbb{Z}_p$-action preserving the orientation on the 6-dimensional sphere $S^6 = G_2/SU(3)$ commuting with the usual $SU(3)$-action on S^6. This means that the group $\mathbb{Z}_p$ is trivial, i.e. the action of $U(1)$ is free. This $U(1)$-action on M^7 defines a compact 6-dimensional manifold $K^6 = M^7/U(1)$ as well as a principal bundle $\pi : M^7 \to K^6$. Since M^7 is an Einstein space of positive scalar curvature, K^6 is an Einstein space of positive scalar curvature, too. The group $SU(3)$ acts as a group of isometries on K^6 and the isotropy subgroups of this action are $SU(2)$ or $SU(3)$. Hence K^6 is isometric to the projective space $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$. Moreover, the 2-form dX is a horizontal 2-form

$$(X \lrcorner\, dX)(Y) = dX(X,Y) = X\langle X,Y\rangle - Y\langle X,X,\rangle - \langle X,[X,Y]\rangle =$$

$$= \langle \nabla_X X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y X\rangle = 0,$$

i.e. X is a connection in the principal $U(1)$-fibre bundle $\pi : M^7 \to K^6$ with curvature form dX. Finally it turns out that M^7 is the 7-dimensional sphere.

It remains to discuss the case of $\dim\,(G) = 8$. In this case, the group G coincides with $G(m) = SU(3)$ and acts on M^7 with cohomogeneity two. The subgroups of $SU(3)$ and their dimensions are

$SO(3)$	3
$S(U(2) \times U(1))$	4
$SU(2)$	3
$U(1) \times U(1)$	2
$U(1)$	1

The orbit $G/G(m^*)$ for any point $m^* \in M^7$ is therefore either a point or at least a 4-dimensional submanifold. The group $G(m^*) = S(U(2) \times U(1))$ cannot occur since the Euler characteristic of $G/G(m^*) = SU(3)/S(U(2) \times U(1)) = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ is not zero (Theorem 6.5). On the other hand, near the point $m \in M^7$ all orbits are of type $SU(3)/SU(2)$. Since the set of all principal orbits of the G-action is dense, the type of the principal orbit is $G(m^*) = SU(2)$. Consequently, we see that $G = SU(3)$ acts on M^7 with two orbit types only. There is a finite set $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ of closed geodesics in M^7 such that $G(m_i) = SU(3)$ $(m_i \in \gamma_i)$ and any other orbit is of type $SU(3)/SU(2) = S^5$. There exists only one geodesic γ. Indeed, $Y = M^7/SU(3)$ is a 2-dimensional manifold with k boundary components and

$$M^7 - \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\} \longrightarrow Int\ (Y)$$

is an S^5-fibration. On the other hand, we have

$$0 = \pi_1(M^7) = \pi_1(M^7 - \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = \pi_1(Int\ (Y))$$

and $Y = D^2$ has only one boundary component. Consequently, M^7 is a 7-dimensional Einstein manifold with isometry group $SU(3)$ and the principal orbits are of type $SU(3)/SU(2)$; there exists only one exceptional orbit - the fixed point set of $SU(3)$. It turns out that M^7 is isometric to the standard 7-dimensional sphere S^7 (M^7 is topologically the sphere and the metric is an $SU(3)$-invariant Einstein metric with respect to the usual action of $SU(3) \subset SO(6) \subset SO(8)$ see [4]).

■

Corollary 6.6.3 *Let (M^7, ω^3) be a simply-connected, compact manifold with nearly parallel G_2-structure not isometric to the sphere S^7. Then* *(i) the dimension of the automorphism $G = Aut\ (M^7, \omega^3)$ has dimension ≤ 13.*

(ii) any isotropy subgroup $G(m)$ has dimension ≤ 6.

6.7 Nearly Parallel G_2-Structures with Large Symmetry Group.

In this section we classify all seven-dimensional compact, simply-connected manifolds with a nearly parallel G_2-structure and symmetry group of dimension at least 10. This classification includes in particular the classification of compact, simply-connected homogeneous nearly parallel G_2-structures.

Let (M^7, g) be a compact, simply-connected 7-dimensional nearly parallel G_2-manifold different from the sphere S^7. Let G be the connected component of the automorphism group of the G_2-structure. We already know that

$$\dim\,(G) \leq 13 \quad \text{and} \quad \dim\,(G(m)) \leq 6 \quad \text{for any point} \;\; m \in M^7$$

holds. We will discuss the spaces case by case depending on the dimension of the group G.

1. case: $\dim\,(G) = 13$.

In this case the dimension of the isotropy group $G(m)$ is 6 for any point $m \in M^7$ and the group G acts transitively on $M^7 = G/G(m)$. There exists only one connected six-dimensional subgroup of the group G_2 (see [13]), namely the isotropy group of the exceptional orbit of the G_2-action on the Grassmannian manifold $G_3(\mathbb{R}^7)$ (see Proposition 2.6). The Lie algebra of this subgroup is defined by the relations:

$$\omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0\,, \quad \omega_{17} + \omega_{36} + \omega_{45} = 0\,, \quad \omega_{27} + \omega_{35} - \omega_{46} = 0$$

$$\omega_{13} = \omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{23} = \omega_{24} = \omega_{25} = \omega_{26} = \omega_{37} = \omega_{47} = \omega_{57} = \omega_{67} = 0$$

and the subgroup is isomorphic to $G(m) = SO(4) = [SU(2) \times SU(2)]/\{\pm 1\}$. Denote by G^* and $G^*(m)$ the 2-fold covering of the group G respectively of the group $G(m)$. Then G^* is a compact, simply-connected 13-dimensional Lie group containing a subgroup isomorphic to $G^*(m) = Sp\,(1) \times Sp\,(1)$.

Using the classification of simple Lie groups we deduce that G^* is isomorphic to $G^* = Sp\,(2) \times Sp(1)$. Consequently, the homogeneous Einstein manifold M^7 is of type $M^7 = [Sp\,(2) \times Sp\,(1)]/[Sp\,(1) \times Sp\,(1)]$ and therefore M^7 is isometric either to the standard sphere S^7 or to the squashed sphere S^7_{squas}.

$\blacksquare$

2. case: dim $(G) = 12$.

In this case the dimension of any isotropy group $G(m)$ is bounded by $5 \leq \dim\,(G(m)) \leq 6$. Since the group G_2 does not contain a subgroup of dimension 5 we obtain that any isotropy group $G(m)$ has dimension 6, i.e. any isotropy group is a 6-dimensional subgroup of G_2 containing the group $SO(4)$ described above:

$$SO(4) \subset G(m) \subset G_2.$$

It is a matter of fact that such a subgroup of G_2 coincides with $SO(4)$. Indeed, consider the covering $G_2/SO(4) \to G_2/G(m)$. Any deck transformation $g \in G_2$ is homotopic to the identity map and therefore its Lefschetz number coincides with the Euler characteristic $\chi(G_2/SO(4)) > 0$, a contradiction. Consequently, the group G acts on M^7 with one orbit type only and M^7 is the total space of a fibration over S^1 with the fibre $F = G/SO(4)$. On the other hand, the exact homotopy sequence of this fibration yields

$$\cdots \to \pi_1(F) \to \pi_1(M^7) = 1 \to \pi(S^1) = \mathbb{Z} \to \pi_0(F) = 1,$$

a contradiction. Finally we see that the case dim $(G) = 12$ is impossible.

$\blacksquare$

3. case: dim $(G) = 11$.

In this case the dimension of any isotropy group $G(m)$ is bounded by $4 \leq \dim\,(G(m)) \leq 6$.

Suppose that $\dim\,(G(m)) = 4$ for one point $m \in M^7$. Then G acts transitively, $M^7 = G/G(m)$, and the isotropy group $G(m) \subset G_2$ is connected. Using the list of all connected subgroups of the exceptional group G_2 (see [13]) we obtain two possibilities:

a) $G(m)$ is the subgroup $[SU(2) \times U(1)]/\{\pm 1\}$ of $SU(3)$. This is in fact the group $SU(3) \cap SO(4)$ and its Lie algebra is given by the equations:

$$\omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0\,, \quad \omega_{36} + \omega_{45} = 0\,, \quad \omega_{35} - \omega_{46} = 0$$

$$\omega_{13} = \omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{17} = \omega_{23} = \omega_{24} = \omega_{25} = \omega_{26} = \omega_{27} = 0$$

$$\omega_{37} = \omega_{47} = \omega_{57} = \omega_{67} = 0.$$

The representation of $G(m)$ in $\mathbb{R}^7$ splits into a 1-, 2- and 4-dimensional invariant subspace,

$$\mathbb{R}^7 = E^1 \oplus E^2 \oplus E^4$$

where $E^2 = Span\ (e_1, e_2), E^4 = Span\ (e_3, e_4, e_5, e_6)$ and $E^1 = Span\ (e_7)$.

b) $G(m)$ is the subgroup $[U(1) \times SU(2)]/\{\pm 1\}$ of $[SU(2) \times SU(2)]/\{\pm 1\} = SO(4)$. The Lie algebra of this group is given by the equations:

$$\omega_{13} = \omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = \omega_{23} = \omega_{24} = \omega_{25} =$$

$$= \omega_{26} = \omega_{37} = \omega_{47} = \omega_{57} = \omega_{67} = 0.$$

$$\omega_{12} + \omega_{34} + \omega_{56} = 0,$$

$$\omega_{17} + \omega_{36} + \omega_{45} = 0\,, \quad \omega_{36} = \omega_{45}\,, \quad \omega_{27} + \omega_{35} - \omega_{46} = 0\,, \quad \omega_{35} = -\omega_{46}.$$

The representation of $G(m)$ in $\mathbb{R}^7$ splits into a 3- and 4-dimensional invariant subspace,

$$\mathbb{R}^7 = F^3 \oplus F^4$$

where $F^3 = Span\ (e_1, e_2, e_7)$ and $F^4 = Span\ (e_3, e_4, e_5, e_6)$.

First we consider the case that $\pi_1(G)$ is a finite group. Denote by G^* its universal covering and lift the isotropy subgroup to $G^*(m) = Sp\,(1) \times U\,(1)$. Then G^* is a simply-connected Lie group of dimension 11 containing the two-dimensional torus $T^2 \subset Sp(1) \times U(1)$. Moreover, since the Euler characteristic of $M^7 = G^*/G^*(m)$ vanishes we conclude that the rank of G^* is greater or equal to 3,

$$rank\ (G^*) \geq 3\,, \quad \dim\ (G^*) = 11\,, \quad \pi_1(G^*) = 1.$$

The classification of all compact Lie groups yields that G^* is isomorphic to $SU(3) \times SU(2)$. In case a) the isotropy group $G(m)$ is contained in $SU(3)$ and consequently the space M^7 admits two real Killing spinors (the G_2-structure is of type 2). On the other hand, the automorphism group of the G_2-structure of the manifold $M(3,2)$ with two Killing spinors described in Section 4 is isomorphic to $SU(3) \times SU(2)$, this group acts transitively on M^7 and the isotropy representation coincides with the representation of $G(m)$ in case a). Hence, in case a) M^7 is isometric to $M(3,2)$. In a similar way we can handle the case b). The manifold $N(1,1)$ admits a G_2-structure of type 1 (not the 3-Sasakian metric!, see Sections 4 and 5) and the automorphism group of this G_2-structure coincides obviously with the isometry group $SU(3) \times SU(2)$. A calculation of the isotropy representation yields that in coincides with the representation of case b) and consequently M^7 is isometric to $N(1,1)$.

Suppose now that $\pi_1(G)$ is not a finite group. The exact homotopy sequence

$$\ldots \to \pi_2(M^7) \to \pi_1(G(m)) = \mathbb{Z} \to \pi_1(G) \to 1$$

yields that $\pi_1(G(m)) = \pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Consider a finite covering G^* of G such that G^* splits into $G^* = U(1) \times G_1$, where G_1 is a simply-connected group of dimension 10. Then G_1 is isomorphic to $Spin(5)$. The decomposition $G^* = U(1) \times Spin(5)$ defines a Killing vector field X on M^7 invariant with respect to the action of $Spin(5)$. Consequently, X has a constant length. In particular, at the point $m \in M^7$ the isotropy group $G(m)$ preserves the vector $X(m)$, i.e. the group $G(m)$ is of type $G(m) = SU(3) \cap SO(4)$ and the isotropy representation splits into

$$T_m(M^7) = E^1 \oplus E^2 \oplus E^4.$$

On the other hand, the embedding $\Phi : G^*(m) = U(1) \times Spin\,(3) \to U(1) \times Spin\,(5) = G^*$ is given by two injective homomorphisms

$$i : Spin\,(3) \to Spin\,(5)\,, \quad j : U(1) \to U(1)$$

($\pi_1(G^*/G^*(m)) = 1$!) and by one homomorphism $k : U(1) \to Spin\,(5)$,

$$\Phi(z,g) = (j(z), k(z) \cdot i(g)).$$

Therefore the isotropy representation of the space $G^*/\Phi(G^*(m))$ considered only as an $Spin\,(3)$-representation is isomorphic to the isotropy representation of the space $Spin\,(5)/i(Spin\,(3))$. There are only two injective homomorphisms $i_1, i_2 : Spin\,(3) \to Spin\,(5)$. The first of them i_1 is related to the 5-dimensional irreducible representation of $SO(3)$ and i_2 is the usual inclusion of $SO(3)$ into $SO(5)$. In case of i_1 we obtain that the isotropy representation of the homogeneous space is irreducible and in case of i_2 we obtain the isotropy representation of the Stiefel manifold $V_{5,2}$ which splits into the irreducible subspaces $E^1 \oplus E^3 \oplus E^3$. This contradicts the mentioned decomposition of $T_m(M^7)$ and finally the case $G^* = U(1) \times Spin\,(5)$ is not possible.

We discuss now the case that any isotropy group $G(m)$ is a 6-dimensional group, i.e. $G(m) = SO(4) \subset G_2$. Since dim $(G) = 11$, any orbit $N = G/G(m) \subset M^7$ has dimension 5 and its tangents space $T_m(N) \subset T_m(M^7)$ defines a $G(m) = SO(4)$-invariant subspace of $T_m(M^7) = \mathbb{R}^7$. The representation of the group $SO(4) \subset G_2 \subset SO(7)$ splits into two $SO(4)$-irreducible parts, namely $\mathbb{R}^7 = F^3 \oplus F^4$ where $F^3 = Span\ (e_1, e_2, e_7)$ and $F^4 = Span\ (e_3, e_4, e_5, e_6)$, a contradiction. Consequently, this case is impossible.

■

4. case: $\dim(G) = 10$.

In this case the dimension of any group $G(m)$ is bounded by $3 \leq \dim(G(m)) \leq 6$.

Suppose that $\dim(G(m)) = 3$ for one point $m \in M^7$. Then G acts transitively, $M^7 = G/G(m)$, and the isotropy group $G(m) \subset G_2$ is connected. Using the list of all connected subgroups of the exceptional group G_2 (see [13]) we obtain four possibilities. In any case, $G(m)$ is isomorphic to $SO(3)$ or to $SU(2)$. Since $\pi_1(M^7) = 1$ we obtain $\pi(G) = \pi_1(G(m)) = 0 \,\text{or}\, \mathbb{Z}_2$. Consider the universal coverings G^* and $G^*(m) = Spin\,(3)$. Then G^* is a simply-connected Lie group of dimension 10. Moreover, since the Euler characteristic of $M^7 = G/G^*(m)$ vanishes we conclude that the rank of G^* is greater or equal to2,

$$rank\,(G^*) \geq 2\,, \quad \dim\,(G^*) = 10\,, \quad \pi_1(G^*) = 1.$$

The classification of all compact Lie groups yields that G^* is isomorphic to $Spin$ (5) and the manifold M^7 is isometric to the Stiefel manifold $V_{5,2}$ or to the spaces $SO(5)/SO(3)$ described in Section 4.

Suppose now that the isotropy group $G(m)$ is a four-dimensional subgroup for one point $m \in M^7$. Then $G(m)$ is one of the two subgroups of G_2 considered in the discution of the case $\dim(G) = 11$. In particular, $G(m)$ is a connected subgroup. The orbit $G \cdot m$ through m is a 6-dimensional manifold, but only the group $G(m) = SU(3) \cap SO(4) \subset G_2$ has a 6-dimensional invariant subspace. Consequently, $G/G(m)$ is the principal orbit of the G-action on M^7 and there are no other orbits of dimension 6. But exceptional orbits do not exist at all. Indeed, since $SU(3)$ cannot occur as an isotropy subgroup, an exceptional orbit must be of type $O^4 = G/SO(4)$. However, the isotropy representation of $SO(4)$ is $F^3 \oplus F^4$, a contradiction to the Corollary 2 in Section 6. Finally the G-action defines a fibration $M^7 \to M^7/G = S^1$ and the exact homotopy sequence yields that M^7 cannot be simply-connected.

It remains to discuss the situation where any orbit is a four-dimensional manifold and every isotropy group $G(m)$ coincides with $SO(4)$. In this situation we can apply the same argument as before and we obtain again a contradiction to Corollary 2. ■

In particular we proved the following

Theorem 6.7.1 *Any compact nearly parallel G_2-manifold with automorphism group of dimension* $\dim(G) \geq 10$ *is homogeneous.*

Probably there exist non-homogeneous nearly parallel G_2-manifolds admitting an automorphism group of dimension 9, 8, $\cdots$. However, explicit non-homogeneous examples with a 9- or 8-dimensional automorphism group up to now are not known. On the other hand, using similar arguments as before one can finish the classification of compact, homogeneous nearly parallel G_2-manifolds. It turns out that in case $\dim(G) \leq 9$ the space is isometric to $Q(1,1,1)$ or to one of the manifolds $N(k,l)$.

Theorem 6.7.2 *Any compact, simply-connected, homogeneous nearly parallel G_2-manifold is one of the spaces described in the three tables of Section 4.*

Chapter 7

Formes harmoniques en présence de spineurs de Killing kählériens

Dans ce chapitre, qui reprend le contenu d'une note parue dans les Comptes

Rendus de l'Académie des Sciences, **t. 322**, *Série I, p.679-684, 1996,* on continue l'étude des variétés admettant des spineurs de Killing kählériens commencée dans le Chapitre 2, en obtenant cette fois-ci des résultats sur les formes harmoniques d'une telle variété.

RÉSUMÉ. – On démontre que le produit de Clifford entre une forme harmonique effective et un spineur de Killing kählérien (cf. [35], [27], [49]) s'annule, ce qui est l'analogue kählérien d'un résultat d'Hijazi concernant les spineurs de Killing riemanniens [27]. Comme conséquence, on montre qu'il n'y a pas de forme parallèle effective de type (p,p) $(p > 0)$ sur les variétés de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact.

ABSTRACT. – We show that the Clifford product between an effective harmonic form and a Kählerian Killing spinor (cf. [35], [27], [49]) vanishes, which is the Kählerian analogue of Hijazi's result concerning Riemannian Killing spinors [27]. As a corollary, we prove that there is no parallel effective (p,p)-form $(p > 0)$ on Kähler-Einstein manifolds admitting a complex contact structure.

CLASSIFICATION AMS. – 53A50, 58A10.

MOTS-CLÉS. – formes harmoniques, spineurs de Killing kählériens.

Abridged English Version - In 1984 Hijazi [25], [26] showed that on a spin manifold, M^n, the Clifford product of a harmonic form of degree $k \neq 0, n$ with a Killing spinor vanishes, which led to the theorem that Kähler manifolds do not admit Killing spinors. Because of this, on Kähler manifolds of odd complex dimension one defined the notion of Kählerian Killing spinors ([27], [35], [49]), and manifolds admitting such spinors were called limiting manifolds. The aim of this note is to prove the following result:

Theorem. *On a limiting manifold, the product of a non-constant harmonic effective form with a Kählerian Killing spinor vanishes.*

The idea of the proof is to show, as in [25], [26], that the two chiral parts of this product are both eigenvectors for the square of the Dirac operator with eigenvalues smaller than the least possible eigenvalue on M. In order to obtain this, we write everything in complex coordinates and use the differential equation of the Kählerian Killing spinor. Then, as a consequence we get

Theorem. *Every parallel (p, p)-form on a Kähler-Einstein manifold M^{8l+6} admitting a complex contact structure is a constant multiples of Ω^p, where Ω is the Kähler form of M.*

7.1 Introduction

En 1984, Hijazi a montré (cf. [25],[26]) que sur une variété spinorielle compacte de dimension n notée M, le produit de Clifford entre une forme harmonique de degré $k \neq 0, n$ et un spineur de Killing est nul. Une conséquence de ce théorème est que si M admet un spineur de Killing, alors il n'y a pas de forme parallèle de degré $k \neq 0, n$ sur M, et en particulier, M n'est pas kählérienne (cf. aussi [45], Prop. 6).

Il était donc naturel de chercher un analogue des spineurs de Killing dans le cas kählérien. Ceci a été fait par Kirchberg en 1986 (cf. [35]) qui a trouvé pour une variété kählérienne compacte spinorielle M, des inégalités optimales entre le carré de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac et la courbure scalaire. Dans le cas où la dimension complexe de M est impaire, les spineurs pour lesquels le cas d'égalité est atteint vérifient une équation différentielle semblable à celle des spineurs de Killing (cf. [27], [35]), et sont appelés, par analogie, des spineurs de Killing kählériens. Les variétés admettant des spineurs de Killing kählériens s'appellent des variétés-limites [49].

Soit M une variété-limite et Ψ un spineur de Killing kählérien. Soit Ω la forme de Kähler de M. Si on essaye de généraliser le théorème d'Hijazi à la lettre, en conjecturant que $\omega \cdot \Psi = 0$ pour toute forme harmonique ω, on se trouve très vite confrontés à une difficulté : le produit $\Omega \cdot \Psi$ est non-nul (cf. [27],[35]), bien que la forme de Kähler Ω soit harmonique. On peut cependant éviter ce problème en limitant la conjecture aux formes *effectives*, car la forme de Kähler joue un rôle très particulier parmi les formes harmoniques. La réponse affirmative à cette conjecture "réduite" et quelques unes de ses conséquences formeront les résultats principaux de ce papier.

7.2 Préliminaires algébriques

Soit M une variété kählérienne compacte de dimension $n = 2\,m$, J la structure complexe et Ω sa forme de Kähler. Pour chaque point x de M il existe un repère local orthonormé $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ avec $Y_\alpha = J(X_\alpha)$ et $\nabla X_\alpha = \nabla Y_\alpha = 0$ en x, qu'on appellera *adapté*. On considère les bases induites sur $T_x^{1,0}(M)$ et $T_x^{0,1}(M)$:

$$Z_\alpha = \frac{1}{2}\,(X_\alpha - i\,Y_\alpha)\ ,\quad Z_{\bar\alpha} = \frac{1}{2}\,(X_\alpha + i\,Y_\alpha).$$

On sait que, une fois la métrique sur M fixée, le fibré en algèbres de Clifford réelles, $\mathrm{Cl}(M)$, est canoniquement isomorphe (en tant que fibré vectoriel) à $\Lambda(TM)$, par la correspondance $e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k} \to e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$, pour $i_1 < \ldots < i_k$ et $\{e_i\}$ base orthonormée (l'isomorphisme ne dépend pas du choix de la base).

Evidemment, cet isomorphisme se prolonge par linéarité à un isomorphisme $\varphi : \mathbf{C}l(M) \to \Lambda(TM \oplus \mathbf{C}) \sim \Lambda(T^*M \oplus \mathbf{C})$, et désormais on identifiera les vecteurs et covecteurs complexes par la métrique, et les formes avec les éléments du fibré en algèbres de Clifford complexes $\mathbf{C}l(M)$ via l'isomorphisme φ. On vérifie alors facilement les relations

$$X \cdot \omega = (-1)^k\,\omega \cdot X - 2\,X \lrcorner\,\omega\ ,\ \forall X \in TM \oplus \mathbf{C},\ \omega \in \Lambda(T^*M \oplus \mathbf{C}), \tag{7.1}$$

$$Z_\alpha \cdot Z_\alpha = Z_{\bar\alpha} \cdot Z_{\bar\alpha} = 0 \quad , \quad Z_\alpha \cdot Z_{\bar\beta} = -Z_{\bar\beta} \cdot Z_\alpha - \delta_{\alpha\beta}, \tag{7.2}$$

$$Z_\alpha \cdot Z_\beta = -Z_\beta \cdot Z_\alpha \quad , \quad Z_{\bar\alpha} \cdot Z_{\bar\beta} = -Z_{\bar\beta} \cdot Z_{\bar\alpha}, \tag{7.3}$$

$$Z_\alpha \wedge Z_{\bar\alpha} = \frac{1}{2} + Z_\alpha \cdot Z_{\bar\alpha} = -\frac{1}{2} - Z_{\bar\alpha} \cdot Z_\alpha, \tag{7.4}$$

$$\sum_\alpha Z_\alpha \cdot Z_{\bar\alpha} = \frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2} \quad , \quad \sum_\alpha Z_{\bar\alpha} \cdot Z_\alpha = -\frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2}. \tag{7.5}$$

$$2\sum_\alpha (Z_{\bar\alpha} \wedge (Z_\alpha \lrcorner\, \omega)) = q\,\omega \quad , \ \forall \omega \in \Lambda^{p,q}. \tag{7.6}$$

Considérons l'opérateur $L : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ donné par $L(\omega) = \omega \wedge \Omega$, et soit Λ son adjoint. On vérifie sans peine (cf. [41]) que $\Lambda = -2\sum_\alpha Z_\alpha \lrcorner\, Z_{\bar\alpha} \lrcorner$ et

$$(\Lambda\, L - L\,\Lambda)\,\omega = (m - r)\,\omega, \ \forall \omega \in \Lambda^r. \tag{7.7}$$

Une forme ω s'appelle effective si $\Lambda\,\omega = 0$.

Supposons maintenant que la métrique sur M est normalisée de telle manière que la courbure scalaire soit égale à $n\,(n+2)$, et que en plus M est une variété-limite différente de $\mathbf{C}\mathrm{P}^m$, et soit Ψ le spineur de Killing kählérien qui satisfait (cf. [27], [49])

$$\nabla_X \Psi = \frac{1}{2}\,(X \cdot \Psi + i\,J(X) \cdot \bar\Psi), \ \forall X. \tag{7.8}$$

Ici, si par rapport à la $\mathbf{Z}_2$-graduation du fibré des spineurs $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, son conjugué est défini par $\bar\Psi = \Psi_+ - \Psi_-$. On a alors (cf. [27],[49])

$$\Omega \cdot \Psi_+ = -i\,\Psi_+ \quad , \quad \Omega \cdot \Psi_- = i\,\Psi_-, \tag{7.9}$$

et on trouve à partir de (7.8)

$$\nabla_{Z_\alpha}\Psi = Z_\alpha \cdot \Psi_- \quad , \quad \nabla_{Z_{\bar\alpha}}\Psi = Z_{\bar\alpha} \cdot \Psi_+. \tag{7.10}$$

Un calcul simple permet d'écrire l'expression en coordonées complexes de l'opérateur de Dirac D :

$$D = 2\sum_\alpha (Z_\alpha \cdot \nabla_{Z_{\bar\alpha}} + Z_{\bar\alpha} \cdot \nabla_{Z_\alpha}). \tag{7.11}$$

7.3 Le théorème principal

Théorème 7.3.1 *Si ω est une forme harmonique effective non-constante sur une variété-limite, et Ψ un spineur de Killing kählérien, alors $\omega \cdot \Psi = 0$.*

Preuve. On fixe un repère local adapté $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha}\}$. La preuve du théorème 7.3.1 repose essentiellement sur deux lemmes :

Lemme 7.3.1 *On a les relations*

$$\sum_\beta Z_\beta \cdot \omega \cdot Z_{\bar\beta} = (-1)^{p+q}\,(\omega \cdot \sum_\beta Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + q\,\omega)$$

et

$$\sum_\beta Z_{\bar\beta} \cdot \omega \cdot Z_\beta = (-1)^{p+q}\,(\omega \cdot \sum_\beta Z_{\bar\beta} \cdot Z_\beta + p\,\omega)$$

Preuve. Pour chaque $\beta \in \{1, \ldots, m\}$, ω s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = Z_\beta \wedge Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + Z_\beta \wedge \omega_\beta + Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\bar\beta} + \omega_{\beta,0},$$

où l'expression de chacune des formes $\omega_{\beta\bar\beta}$, ω_β, $\omega_{\bar\beta}$ et $\omega_{\beta,0}$ ne contient pas des termes de la forme Z_β ou $Z_{\bar\beta}$ dans la base $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha}\}$. Evidemment on a

$$\omega_{\beta\bar\beta} = 4\,Z_\beta \lrcorner\, Z_{\bar\beta} \lrcorner\, \omega \text{ et } 2\,Z_\beta \lrcorner\, \omega = -Z_\beta \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + \omega_{\bar\beta}, \tag{7.12}$$

$$Z_\beta \cdot \omega = (-1)^{p+q}\,\omega \cdot Z_\beta + Z_\beta \cdot \omega_{\beta\bar\beta} - \omega_{\bar\beta}. \tag{7.13}$$

Cette dernière relation est en fait une conséquence directe de (7.1) et (7.12). Si on multiplie à droite par $Z_{\bar\beta}$, on somme sur β dans (7.13), et on utilise (7.12) et (7.6), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_\beta Z_\beta \cdot \omega \cdot Z_{\bar\beta} &= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} \cdot \omega_{\beta\bar\beta} + Z_{\bar\beta} \cdot \omega_{\bar\beta}) \\
&= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} - (\tfrac{1}{2} + Z_{\bar\beta} \wedge Z_\beta) \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\bar\beta}) \\
&= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} - \tfrac{1}{2}\,\omega_{\beta\bar\beta} + 2Z_{\bar\beta} \wedge (Z_\beta \lrcorner\, \omega)) \\
&= (-1)^{p+q}\,(\omega \cdot \sum_\beta Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + \Lambda(\omega) + q\,\omega).
\end{aligned}$$

La deuxième relation se démontre de la même manière, ou directement par conjugaison.

†

Lemme 7.3.2 *On a la relation*

$$D(\omega \cdot \Psi) = (2q - m - 1)\,\omega \cdot \Psi_+ + (2p - m - 1)\,\omega \cdot \Psi_-.$$

Preuve. On utilise le lemme précédent et les formules (7.9), (7.10), et (7.11) et on obtient

$$\begin{aligned} D(\omega\cdot\Psi) &= ((d+\delta)\omega)\cdot\Psi + 2\sum_\alpha (Z_\alpha\cdot\omega\cdot\nabla_{Z_{\bar\alpha}}\Psi + Z_{\bar\alpha}\cdot\omega\cdot\nabla_{Z_\alpha}\Psi) \\ &= 2\sum_\alpha (Z_\alpha\cdot\omega\cdot Z_{\bar\alpha}\cdot\Psi_+ + Z_{\bar\alpha}\cdot\omega\cdot Z_\alpha\cdot\Psi_-) \\ &= 2\left(\omega\cdot\left(\frac{\Omega}{2i}-\frac{m}{2}+q\right)\cdot\Psi_+ + \omega\cdot\left(-\frac{\Omega}{2i}-\frac{m}{2}+p\right)\cdot\Psi_-\right) \\ &= (2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_+ + (2p-m-1)\,\omega\cdot\Psi_-. \end{aligned}$$

†

On peut supposer que la métrique de M est normalisée telle que $S = n\,(n+2)$, et on sait alors que toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait $\lambda^2 \geq (m+1)^2$ (cf. [35], [27], [49]). D'autre part, le lemme précédent montre que

$$D(\omega\cdot\Psi_+) = (2p-m-1)\,\omega\cdot\Psi_- \quad \text{et} \quad D(\omega\cdot\Psi_-) = (2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_+,$$

ce qui implique

$$D^2(\omega\cdot\Psi_+) = (2p-m-1)\,(2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_+, \tag{7.14}$$

$$D^2(\omega\cdot\Psi_-) = (2p-m-1)\,(2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_-. \tag{7.15}$$

Comme $|(2p-m-1)\,(2q-m-1)| < (m+1)^2$, on doit avoir $\omega\cdot\Psi = 0$, ce qui achève la preuve du théorème.

Q.E.D.

7.4 Conséquences

Lemme 7.4.1 *Soit ω une forme parallèle effective de type (p,p). Si $p > 0$, alors $\omega = 0$.*

Preuve. Soit $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ un repère local adapté en un point $x \in M$. En utilisant (7.1), (7.10) et le théorème A, on a

$$0 = \varepsilon\,\nabla_{Z_\alpha}(\omega\cdot\Psi_+) = \varepsilon\,\omega\cdot Z_\alpha\cdot\Psi_- = Z_\alpha\cdot\omega\cdot\Psi_- + 2\,Z_\alpha\lrcorner\,\omega\cdot\Psi_-,$$

$$0 = \varepsilon\,\nabla_{Z_{\bar\alpha}}(\omega\cdot\Psi_-) = \varepsilon\,\omega\cdot Z_{\bar\alpha}\cdot\Psi_+ = Z_{\bar\alpha}\cdot\omega\cdot\Psi_+ + 2\,Z_{\bar\alpha}\lrcorner\,\omega\cdot\Psi_+,$$

($\varepsilon = (-1)^{p+q}$), donc

$$0 = Z_\alpha \lrcorner\, \omega \cdot \Psi_- = Z_{\bar\alpha} \lrcorner\, \omega \cdot \Psi_+,\ \forall \alpha. \tag{7.16}$$

En utilisant (7.16) on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{Z_{\bar\beta}}(Z_\alpha \lrcorner\, \omega \cdot \Psi_-) = Z_\alpha \lrcorner\, \omega \cdot \nabla_{Z_{\bar\beta}} \Psi_- = -\varepsilon\, Z_{\bar\beta} \cdot (Z_\alpha \lrcorner\, \omega) \cdot \Psi_+ \\ &\quad -2\,\varepsilon\, Z_{\bar\beta} \lrcorner\, Z_\alpha \lrcorner\, \omega \cdot \Psi_+ = -2\,\varepsilon\, Z_{\bar\beta} \lrcorner\, Z_\alpha \lrcorner\, \omega \cdot \Psi_+, \end{aligned}$$

en x, donc partout, car l'expression est tensorielle. En répétant cet argument p fois, on voit que

$$(Z_{\alpha_1} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_1} \lrcorner\, \dots Z_{\alpha_p} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_p} \lrcorner\, \omega) \cdot \Psi_+ = 0,\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_p, \bar\beta_1, \dots, \bar\beta_p. \tag{7.17}$$

Mais ($Z_{\alpha_1} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_1} \lrcorner\, \dots Z_{\alpha_p} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_p} \lrcorner\, \omega$) sont des 0-formes (locales), donc (7.17) implique qu'elles sont identiquement nulles, et par conséquent $\omega = 0$.

†

Théorème 7.4.1 *Il n'y a pas de forme parallèle de type (p, p) sur une variété-limite M, en dehors des multiples constants des puissances exterieures de la forme de Kähler.*

Preuve. Soit ω une forme parallèle de type (p, p). On peut alors écrire $\omega = \omega_p + \Omega \wedge \omega_{p-1} + \dots \Omega^p \wedge \omega_0$, avec $\omega_i \in \Lambda^{i,i}$ formes harmoniques effectives (cf. par example [41]). Soit $\sigma = \omega - \Omega^p \wedge \omega_0$. En appliquant (7.7) p fois on trouve

$$\Lambda^p\, \omega = (m - 2p)(m - 2p + 2) \dots m\, \omega_0.$$

Comme Ω est une forme parallèle, $\Lambda^k \omega$ est parallèle donc ω_0 est une constante (m étant impair, le facteur devant ω_0 est non-nul). Il suffit donc de montrer que $\sigma = 0$. En appliquant (7.7) $p - 1$ fois on trouve

$$\Lambda^{p-1}\, \sigma = (m - 2p)(m - 2p + 2) \dots (m - 2)\, \omega_1,$$

et comme m est impair, ω_1 est parallèle et effective, donc nulle d'après le lemme 7.4.1. Par récurrence on obtient alors $\omega_i = 0$ pour chaque $i \geq 1$.

Q.E.D.

En utilisant le fait (cf. [38],[48]) que les variétés-limites sont exactement les variétés de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact en dimension $8\,l + 6$, on peut donner la reformulation suivante des théorème B :

Théorème 7.4.2 *En dehors des multiples constants des puissances exterieures de la forme de Kähler, il n'y a pas de forme parallèle de type* (p,p) *sur une variété* M^{8l+6} *de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact.*

Remerciements. Ces résultats doivent leur existence en grande partie à Jean Pierre Bourguignon, qui m'a proposé de regarder en détail le problème traité ici. Je lui en suis très reconnaissant. Je remercie Oussama Hijazi dont la lecture attentive d'une version préliminaire de cette note m'a permis d'éviter une erreur de calcul qui faussait complètement les résultats de la section 4.

Chapter 8

Structures de Weyl admettant des spineurs parallèles

Ce chapitre, qui reprend le texte d'un article à paraître dans Bull. S.M.F., *peut être lu indépendamment des autres parties de la thèse. Il classifie les structures de Weyl D sur les variétés spinorielles simplement connexes admettant des spineurs parallèles par rapport à la connexion induite par D sur le fibré des spineurs.*

RÉSUMÉ. – Etant donné une structure de Weyl D sur une variété spinorielle (M^n, g), et un spineur non-nul D-parallèle sur M, nous démontrons que D est fermée si $n \neq 4$, ou si M est compacte de dimension 4. Nous donnons des exemples de variétés spinorielles non-compactes de dimension 4 qui admettent des spineurs parallèles par rapport à des structures de Weyl qui ne sont pas fermées.

ABSTRACT. – We prove that given a Weyl structure D on a spin manifold (M^n, g), the existence of a non-zero D-parallel spinor on M implies that D is closed for $n \neq 4$. The same statement is true for $n = 4$ if M is compact. We give non-compact examples of 4-manifolds admitting parallel spinors with respect to non-closed Weyl structures.

CLASSIFICATION AMS. – 53A50, 53C07, 53C55.

MOTS-CLÉS. – spineurs, structures de Weyl, structures hermitiennes.

8.1 Introduction

Les variétés spinorielles simplement connexes irréductibles admettant des spineurs parallèles ont été caractérisées du point de vue de leur groupe d'holonomie par N. Hitchin dans [29] (Théorème 1.2 et Remarque à la page 54; cf. aussi [58]) : ce sont les variétés à holonomie Spin(7), G_2, Sp(n) ou SU(n).

Soit (M^n, g), $n \geq 3$, une variété spinorielle simplement connexe. On considère ici le problème de l'existence des spineurs parallèles par rapport à une structure de Weyl quelconque D sur M qui est, évidemment, une généralisation du problème de l'existence des spineurs parallèles car la connexion de Levi-Civita est un cas particulier de structure de Weyl. Ce problème est invariant par transformations conformes de la métrique: tout spineur Ψ sur (M, g), parallèle par rapport à D, induit un spineur $\bar{\Psi}$ sur $(M, \bar{g})$, parallèle par rapport à D. Si D est exacte, alors D est la connexion de Levi-Civita d'une métrique $\bar{g}$ de la classe conforme de g, donc il existe une solution (Ψ, D) avec D exacte si et seulement si (M, g) est conformément équivalente à une des variétés décrites ci-dessus.

On va, par conséquent, s'intéresser aux solutions nontriviales du problème, c.à.d. aux paires (Ψ, D) avec Ψ parallèle par rapport à D et D non-fermée. Le but de ce papier est de montrer qu'il n'y a pas de solution nontriviale si $n \neq 4$ ou si $n = 4$ et M compacte, et de construire des exemples de solutions nontriviales sur des variétés noncompactes de dimension 4.

Je remercie pour leur aide les membres du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, en particulier, P. Gauduchon pour les discussions que nous avons eues ensemble et qui ont permis à ce travail de prendre forme, et V. Apostolov a qui je dois l'exemple de la section 7.

Je remercie également J. P. Bourguignon pour le soutien scientifique et moral qu'il m'apporte depuis de nombreuses années.

8.2 Structures de Weyl

Une structure de Weyl sur une variété riemannienne (M, g), ou plus généralement conforme $(M, [g])$, est une connexion linéaire D, symétrique et préservant la structure conforme $[g]$. Une fois la métrique g fixée dans sa classe conforme, D est uniquement déterminée par un champ de vecteurs θ, identifié par g à une 1-forme sur M. La dérivée covariante de D est alors reliée à la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita de g par la formule

$$D_X Y = \nabla_X Y + \theta(X)Y + \theta(Y)X - \theta g(X,Y)\,, \qquad \forall X, Y\,. \tag{8.1}$$

Considérons un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f} g$, où f est une fonction strictement positive sur M. La forme $\bar{\theta}$ associée à $(D, \bar{g})$ est reliée à θ par

$$\bar{\theta} = \theta + df\,. \tag{8.2}$$

La structure de Weyl s'appelle fermée (resp. exacte) si la forme θ est fermée (resp. exacte), et la formule précédente montre que ceci ne dépend que de la classe conforme de g. Toute structure de Weyl exacte est fermée, et la réciproque est vraie dans le cas où M est simplement connexe.

Pour des détails et d'autres résultats sur les structures de Weyl on propose comme référence l'excellent papier de P. Gauduchon [18].

8.3 L'action d'une structure de Weyl sur le fibré des spineurs

On s'intéresse maintenant au cas d'une structure de Weyl D sur une variété spinorielle (M, g) et on veut calculer la formule de la dérivée covariante induite par D sur le fibré des spineurs ΣM. Soit $s = (X_1, \cdots, X_n)$ une section locale du fibré des repères orthonormés directes $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ qui induit une section locale $\tilde{s}$ de la structure spinorielle $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$. Si un spineur Φ s'écrit localement $\Phi = [\tilde{s}, \phi]$, où $\phi : U \subset M \to \Sigma_n$, alors on a (cf. [42], p. 110)

$$\begin{aligned}
D_X\Phi &= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle D_X X_j, X_k\rangle \cdot \Phi + [\tilde{s}, X(\phi)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j<k} X_j \cdot X_k \langle \nabla_X X_j + \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi \\
&\quad +[\tilde{s}, X(\phi)] \\
&= \nabla_X\Phi - \frac{1}{4}\sum_{j,k} X_j \cdot X_k \langle \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi \\
&\quad +\frac{1}{4}\sum_{j=k} X_j \cdot X_k \langle \theta(X)X_j + \theta(X_j)X - \theta\langle X, X_j\rangle, X_k\rangle \cdot \Phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_X \Phi - \frac{1}{4}\left(-n\theta(X) + \theta \cdot X - X \cdot \theta\right)\Phi \\
&\quad -\frac{1}{4}\left(n\theta(X) + \langle \theta, X\rangle - \langle \theta, X\rangle\right)\Phi \\
&= \nabla_X \Phi - \frac{1}{2} X \cdot \theta \cdot \Phi - \frac{1}{2}\langle X, \theta\rangle \Phi .
\end{aligned}
$$

Un spineur Φ s'appelle D-parallèle si $D_X\Phi = 0$, $\forall X$, donc, par ce qui précède, si

$$\nabla_X \Phi - \frac{1}{2} X \cdot \theta \cdot \Phi - \frac{1}{2}\langle X, \theta\rangle \Phi = 0, \quad \forall X . \tag{8.3}$$

Cette notion ne dépend que de la classe conforme de la métrique, dans le sens suivant: pour tout changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f}g$ on a une structure spinorielle sur $(M, \bar{g})$ canoniquement isomorphe à la structure spinorielle sur (M, g), et soit $\bar{\Psi}$ le spineur qui correspond à Ψ par cet isomorphisme. On a alors les relations (cf. [2], [26]):

$$\bar{X} \cdot \bar{\Psi} = \overline{X \cdot \Psi}\,, \tag{8.4}$$

$$\bar{\nabla}_X \bar{\Psi} = \overline{\nabla_X \Psi} + \frac{1}{2}\overline{X \cdot \nabla f \cdot \Psi} + \frac{1}{2} g(X, \nabla f)\bar{\Psi}\,, \tag{8.5}$$

où le gradient ∇f correspond à la métrique g. Par conséquent (8.2), (8.3) et (8.5) montrent que Ψ est D-parallèle sur (M, g) si et seulement si $\bar{\Psi}$ est D-parallèle sur $(M, \bar{g})$.

8.4 Le cas $n \neq 4$

Théorème 8.4.1 *Soit D une structure de Weyl sur une variété spinorielle (M^n, g), $n \geq 3$, $n \neq 4$, et supposons que sur M il existe un spineur D-parallèle nonnul. Alors D est fermée, donc en particulier, si M est simplement connexe, il existe un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f}g$ tel que $(M, \bar{g})$ admet des spineurs parallèles.*

Preuve. Considérons un spineur Ψ sur M qui satisfait (8.3). On continuera dans la suite à identifier le vecteur θ et la 1-forme qui lui correspond par l'isomorphisme musical induit par g. Considérons un point $x \in M$ fixé et X, Y deux vecteurs parallèles en x et $\{e_i\}$ un repère orthonormé parallèle en x également. Pour alléger les calculs on note $\theta = 2\xi$, et Ψ satisfait alors

$$\nabla_Z \Psi = Z \cdot \xi \cdot \Psi + \langle Z, \xi\rangle \Psi, \quad \forall Z . \tag{8.6}$$

En prenant le produit scalaire avec Ψ on trouve $\nabla_Z\langle\Psi,\Psi\rangle = 0$, donc $\langle\Psi,\Psi\rangle$ est une constante strictement positive. Pour $Z = \xi$ dans (8.6), on obtient

$$\nabla_\xi \Psi = 0 \tag{8.7}$$

et ensuite, si on pose $Z = e_i$, on multiplie par e_i et on somme sur i dans (8.6), on trouve

$$P\Psi = (1-n)\,\xi\cdot\Psi\,, \tag{8.8}$$

$$P^2\Psi = (1-n)(d\xi+\delta\xi)\cdot\Psi + (n-1)^2\|\xi\|^2\Psi\,, \tag{8.9}$$

où P est l'opérateur de Dirac. D'autre part (la sommation sur l'indice i étant sous-entendue)

$$\begin{aligned}
-\nabla^*\nabla\Psi &= \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Psi = \nabla_{e_i}(e_i\cdot\xi\cdot\Psi + \langle e_i,\xi\rangle\,\Psi) \\
&= (d\xi+\delta\xi)\cdot\Psi + e_i\cdot\xi\cdot e_i\cdot\xi\cdot\Psi - \|\xi\|^2\Psi - \delta\xi\,\Psi \\
&= d\xi\cdot\Psi + (1-n)\|\xi\|^2\Psi\,.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Lichnerowicz et (8.9) on obtient

$$(n-2)\,d\xi\cdot\Psi = (-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4})\cdot\Psi \tag{8.10}$$

Si on fait le produit scalaire avec Ψ, le membre gauche sera imaginaire pur (car $d\xi$ est une 2-forme), et le membre droit sera, évidemment, réel. En particulier

$$(-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4})\,\langle\Psi,\Psi\rangle = 0\,, \tag{8.11}$$

donc

$$-(1-n)\delta\xi - (n-1)(n-2)\|\xi\|^2 + \frac{R}{4} = 0\,, \tag{8.12}$$

car $\langle\Psi,\Psi\rangle$ est une constante non-nulle. De (8.10) et (8.12) on obtient

$$d\xi\cdot\Psi = 0\,. \tag{8.13}$$

En posant $Z = X$ et en dérivant (8.6) par rapport à Y on trouve

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\nabla_X\Psi &= X\cdot\nabla_Y\xi\cdot\Psi + X\cdot\xi\cdot Y\cdot\xi\cdot\Psi + \langle X,\nabla_Y\xi\rangle\,\Psi \\
&\quad +\langle X,\xi\rangle Y\cdot\xi\cdot\Psi + X\cdot\xi\langle Y,\xi\rangle\,\Psi + \langle X,\xi\rangle\langle Y,\xi\rangle\,\Psi\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{Y,X}\Psi &= X\cdot\nabla_Y\xi\cdot\Psi - Y\cdot\nabla_X\xi\cdot\Psi + (X\cdot\xi\cdot Y\cdot\xi - Y\cdot\xi\cdot X\cdot\xi)\cdot\Psi\\ &\quad +\langle X,\nabla_Y\xi\rangle\,\Psi - \langle Y,\nabla_X\xi\rangle\,\Psi\,.\end{aligned}$$

Cette relation, la formule (cf. [42])

$$Ric(X)\cdot\Psi = 2\,e_i\cdot\mathcal{R}_{e_i,X}\Psi \tag{8.14}$$

et (8.13), donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,Ric(X)\cdot\Psi &= e_i\cdot(X\cdot\nabla_{e_i}\xi\cdot\Psi - e_i\cdot\nabla_X\xi\cdot\Psi + (X\cdot\xi\cdot e_i\cdot\xi\\ &\quad -e_i\cdot\xi\cdot X\cdot\xi)\cdot\Psi + \langle X,\nabla_{e_i}\xi\rangle\,\Psi - \langle e_i,\nabla_X\xi\rangle)\,\Psi\\ &= (-X\cdot(d\xi+\delta\xi) - 2\nabla_X\xi + n\nabla_X\xi + nX\|\xi\|^2 - 2\xi\cdot X\cdot\xi\\ &\quad -2X\|\xi\|^2 + n\xi\cdot X\cdot\xi + e_i\langle X,\nabla_{e_i}\xi\rangle - \nabla_X\xi)\cdot\Psi\\ &= (-X\delta\xi + (n-3)\nabla_X\xi + 2(n-2)X\|\xi\|^2\\ &\quad -2(n-2)\langle X,\xi\rangle\xi + e_i\langle X,\nabla_{e_i}\xi\rangle)\cdot\Psi\,,\end{aligned}$$

donc, Ψ étant nonnul,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,Ric(X) &= -X\delta\xi + (n-3)\nabla_X\xi + 2(n-2)X\|\xi\|^2\\ &\quad -2(n-2)\langle X,\xi\rangle\xi + e_i\langle X,\nabla_{e_i}\xi\rangle\,,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,Ric(X,Y) &= -\delta\xi\langle X,Y\rangle + (n-3)\langle\nabla_X\xi,Y\rangle + 2(n-2)\langle X,Y\rangle\|\xi\|^2\\ &\quad -2(n-2)\langle X,\xi\rangle\langle\xi,Y\rangle + \langle\nabla_Y\xi,X\rangle\,.\end{aligned}$$

Le tenseur de Ricci étant symétrique, on trouve (pour $n \neq 4$)

$$\langle\nabla_X\xi,Y\rangle = \langle\nabla_Y\xi,X\rangle\,, \tag{8.15}$$

ou, de manière équivalente, $d\xi = 0$. La dernière affirmation du théorème résulte des considérations de la section 3.

QED

8.5 Le cas $n = 4$

On se tourne maintenant vers le cas où la dimension de M est égale à 4. Le fibré des spineurs se décompose sous l'action de la forme volume *vol* en $\Sigma M = \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M$, où

$$\Sigma^{\pm} M = \{\Psi \mid vol \cdot \Psi = \mp\Psi\}\,. \tag{8.16}$$

Cette décomposition est préservée par la dérivée covariante car *vol* est parallèle. On notera désormais par $\Psi^{\pm}$ les projections orthogonales de Ψ sur $\Sigma^{\pm} M$. Grâce à (8.16) on voit que changer l'orientation de M revient à interchanger $\Sigma^+ M$ et $\Sigma^- M$. Si un spineur Ψ vérifie l'équation (8.6), alors ses composantes $\Psi^{\pm}$ la vérifient aussi, donc quitte à changer éventuellement l'orientation de M, on peut supposer $\Psi \in \Sigma^+ M$.

D'autre part, en dimension 4, l'opérateur de Hodge $*$ agit involutivement sur $\Lambda^2 M$ et définit par conséquent une décomposition orthogonale $\Lambda^2 M = \Lambda_+ M \oplus \Lambda_- M$, où $\Lambda_+ M$ ($\Lambda_- M$) est l'espace propre de $*$ correspondant à la valeur propre 1 (resp. -1). Par rapport à cette décomposition, toute forme $\omega \in \Lambda^2 M$ s'écrit $\omega = \omega_+ + \omega_-$. Les éléments de $\Lambda_+ M$ ($\Lambda_- M$) s'appellent des formes autoduales (resp. anti-autoduales).

Lemme 8.5.1 *1. Si $\omega \in \Lambda_-$ est une 2-forme anti-autoduale fixée, la restriction à $\Sigma^+ M$ de la multiplication de Clifford par ω est l'endomorphisme nul.*

2. Pour chaque spineur fixé $\Psi \in \Sigma^+ M$, l'homomorphisme $u : \Lambda_+ M \to \Sigma^+ M$ défini par $\omega \mapsto \omega \cdot \Psi$ est injectif.

Preuve. 1. Le produit de Clifford par une 2-forme est un endomorphisme anti-hermitien de $\Sigma^+ M$. Si la 2-forme ω est, en plus, anti-autoduale, on a

$$\begin{aligned} \omega \cdot \omega \cdot \Psi &= \omega \wedge \omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = -\omega \wedge *\omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi \\ &= -\langle \omega, \omega \rangle vol \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = 0, \quad \forall \Psi \in \Sigma^+ M\,. \end{aligned}$$

Il reste a remarquer qu'un endomorphisme anti-hermitien de carré nul est lui-même nul.

2. Si $\omega \in ker(u)$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= \omega \cdot \omega \cdot \Psi = \omega \wedge \omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = \omega \wedge *\omega \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi \\ &= \langle \omega, \omega \rangle vol \cdot \Psi - \langle \omega, \omega \rangle \Psi = -2\langle \omega, \omega \rangle \Psi\,, \end{aligned}$$

donc $\omega = 0$.

QED

L'équation (8.13) et le lemme 8.5.1 impliquent

$$(d\xi)_+ = 0\,. \tag{8.17}$$

Supposons que M est compacte. De (8.17) on déduit $d\xi = - * d\xi$, donc $\delta d\xi = *d * d\xi = - * d^2\xi = 0$. En faisant le produit L^2 avec ξ dans cette égalité on obtient

$$0 = (\delta d\xi, \xi)_{L^2} = \|d\xi\|^2_{L^2}, \tag{8.18}$$

ce qui montre que $d\xi = 0$. On a donc prouvé le

Théorème 8.5.1 *Soit D une structure de Weyl sur une variété spinorielle compacte (M^4, g) et supposons que sur M il existe un spineur D-parallèle nonnul. Alors D est fermée, donc en particulier, si M est simplement connexe, il existe un changement conforme de métrique $\bar{g} = e^{-2f}g$ tel que $(M, \bar{g})$ admet des spineurs parallèles.*

Remarque. On verra dans un instant que le théorème 8.5.1 admet une version beaucoup plus précise (Cor. 8.6.1).

8.6 Spineurs et structures complexes en dimension 4

Le but de cette section est de montrer que l'existence d'une structure de Weyl possédant des spineurs parallèles est équivalente à l'existence d'une structure hyperhermitienne sur M.

Soit J une structure presque complexe compatible avec la métrique d'une variété riemannienne de dimension 4 et Ω sa forme de Kähler : $\Omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle$. La forme de Lee de J, que l'on note ρ, est définie par la formule

$$d\Omega = \rho \wedge \Omega\,, \tag{8.19}$$

ou, de manière équivalente, $\rho = J\delta\Omega$. Evidemment, J définit une structure kählérienne si et seulement si J est intégrable et $\rho = 0$.

Lemme 8.6.1 *La structure presque complexe J est intégrable si et seulement si*

$$\nabla_X \Omega = \rho \wedge JX - X \wedge J\rho \,. \tag{8.20}$$

Preuve. Si (8.20) est vérifiée, on obtient facilement

$$2(\nabla_X J)Y = \rho\langle JX, Y\rangle - JX\langle \rho, Y\rangle - X\langle J\rho, Y\rangle + J\rho\langle X, Y\rangle \,, \tag{8.21}$$

ce qui permet de voir par calcul direct que le tenseur de Nijenhuis s'annule. Réciproquement, si $N = 0$, la formule de [40], p.148 donne

$$\begin{aligned} 2(\nabla_X \Omega)(Y,Z) &= 3(\rho \wedge \Omega)(X,Y,Z) - 3(\rho \wedge \Omega)(X, JY, JZ) \\ &= \langle \rho, X\rangle\langle Y, JZ\rangle + \langle \rho, Y\rangle\langle Z, JX\rangle + \langle \rho, Z\rangle\langle X, JY\rangle \\ &\quad -\langle \rho, X\rangle\langle Y, JZ\rangle - \langle \rho, JY\rangle\langle Z, X\rangle + \langle \rho, JZ\rangle\langle X, Y\rangle \\ &= 2(\rho \wedge JX - X \wedge J\rho)(Y,Z) \,. \end{aligned}$$

QED

Lemme 8.6.2 *Soit M une variété spinorielle de dimension 4, D une structure de Weyl et $\Psi \in \Sigma^+ M$ un spineur positif sur M. Si Ψ ne s'annule pas sur M, alors il définit une structure presque complexe J sur M. Si, en plus, Ψ est D-parallèle, J est intégrable et D-parallèle et sa forme de Lee ρ satisfait $\rho = -4\xi = -2\theta$.*

Preuve. La dimension complexe de $\Sigma^+ M$ étant égale à 2, le morphisme injectif $TM \to \Sigma^- M$, $X \mapsto X \cdot \Psi$, est en fait un isomorphisme. La structure presque complexe J est alors définie par l'équation

$$JX \cdot \Psi = iX \cdot \Psi \,, \qquad \forall X \in TM \,, \tag{8.22}$$

et on laisse au lecteur le soin de montrer que J ainsi défini est une structure presque complexe compatible avec la métrique.

De (8.22) et (8.6) on déduit par dérivation

$$\begin{aligned} -\nabla_Y(JX) \cdot \Psi &= JX \cdot \nabla_Y \Psi - i\nabla_Y X \cdot \Psi - iX \cdot \nabla_Y \Psi \\ &= (JX - iX) \cdot \nabla_Y \Psi \\ &= (JX - iX) \cdot (Y \cdot \xi \cdot \Psi + \langle Y, \xi\rangle \Psi) \\ &= -Y \cdot (JX - iX) \cdot \xi \cdot \Psi - 2\langle JX - iX, Y\rangle \xi \cdot \Psi \\ &= 2\langle JX - iX, \xi\rangle Y \cdot \Psi - 2\langle JX - iX, Y\rangle \xi \cdot \Psi \\ &= 2(\langle JX, \xi\rangle Y - \langle X, \xi\rangle JY - \langle JX, Y\rangle \xi + \langle X, Y\rangle J\xi) \cdot \Psi \,, \end{aligned}$$

donc

$$\nabla_Y(JX) = -2(\langle JX,\xi\rangle Y - \langle X,\xi\rangle JY - \langle JX,Y\rangle\xi + \langle X,Y\rangle J\xi)\,, \qquad (8.23)$$

et un calcul direct montre, comme dans la preuve du lemme précédent, que J est intégrable. La réciproque de ce lemme nous assure alors que la forme de Lee de J est $\rho = -4\xi$. Finalement, à partir de la définition de D il est facile de voir que J est D-parallèle si et seulement si J satisfait (8.21).

QED

On rappelle qu'en dimension 4, le fibré Σ^+M possède une structure quaternionienne parallèle, c.à.d. un automorphisme $\mathbf{C}$-anti-linéaire $\mathbf{j}$ qui satisfait $\mathbf{j}^2 = -1$ et commute avec le produit de Clifford. On voit alors que si Ψ est D-parallèle, $\mathbf{j}\Psi$ est lui aussi D-parallèle. Soient J_1 et J_2 les structures hermitiennes induites par Ψ et $\Psi + \mathbf{j}\Psi$ (lemme 8.6.2). On a alors

$$\begin{aligned} J_2J_1X\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi) &= iJ_1X\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi) = -X\cdot\Psi + i\mathbf{j}iX\cdot\Psi \\ &= X\cdot(-\Psi+\mathbf{j}\Psi)\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_1J_2X\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi) &= iJ_2X\cdot\Psi - iJ_2X\cdot\mathbf{j}\Psi = iJ_2X\cdot(\Psi-\mathbf{j}\Psi) \\ &= -i\mathbf{j}J_2X\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi) = -i\mathbf{j}iX\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi) \\ &= X\cdot(\Psi-\mathbf{j}\Psi) = -J_2J_1X\cdot(\Psi+\mathbf{j}\Psi)\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que $J_2J_1 = -J_1J_2$. Le triple $\{J_1,\, J_2,\, J_3 = J_1J_2\}$ représente alors une structure hyperhermitienne sur M. Réciproquement, la donnée d'une telle structure sur M implique d'abord que les trois structures complexes ont la même forme de Lee (cf. [6]), donc qu'elles sont D-parallèles, D étant la structure de Weyl définie par $-2\theta = \rho$. Le fibré Λ_+M est donc plat par rapport à D, et il en va de même pour le fibré Σ^+M, car $L_+M = S^2(\Sigma^+M)$. On a donc prouvé le

Théorème 8.6.1 *Soit (M^4, g) une variété spinorielle compacte avec une structure de Weyl D. Alors M admet un spineur D-parallèle si et seulement si M admet une structure hyperhermitienne $\{J_1,\, J_2,\, J_3\}$, et D est la structure de Weyl qui correspond à la forme de Lee (commune) des structures complexes J_i.*

Corollaire 8.6.1 (cf. [6]) *Soit* (M^4, g) *une variété spinorielle compacte avec une structure de Weyl* D *et supposons que sur* M *il existe un spineur* D*-parallèle nonnul. Alors* M *est conformément équivalente à une des variétés suivantes:*

- un tore plat;

- une surface $K3$*;*

- une surface de Hopf quaternionienne avec sa métrique standard localement conformément plate.

8.7 Exemples noncompacts en dimension 4

On a vu que les seuls exemples qu'on pourrait espérer de solutions nontriviales de notre problème devraient être construits sur des variétés noncompactes de dimension 4. Dans cette section on va présenter un tel exemple, dû essentiellement à D. Joyce (cf. [32]) et porté à notre connaissance par V. Apostolov.

Soit $u : U \subset \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction qui ne s'annule pas sur l'ouvert U, et considérons la métrique riemannienne

$$g_u = dz_1\, d\bar{z}_1 + |u|^2 dz_2\, d\bar{z}_2.$$

Les relations

$$J_1 + iJ_2 = u\, dz_1\, d\bar{z}_2 + \bar{u}\, d\bar{z}_1\, dz_2\ ,\ J_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(dz_1\, d\bar{z}_1 - |u|^2 dz_2\, d\bar{z}_2),$$

définissent 3 structures presque hermitiennes J_1, J_2, J_3 sur $(\bar{U}, g_u)$, où $\bar{U}$ signifie U avec l'orientation opposée.

On peut vérifier que les formes de Lee de J_1 et J_2 sont toutes les deux égales à

$$\tau = \frac{1}{\bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z_1} dz_1 + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z_2} dz_2 + \frac{1}{\bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z_2} dz_2,$$

et la forme de Lee de J_3 est donnée par

$$\theta = 2\frac{\partial}{\partial z_2}\ln|u|\, dz_2 + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\ln|u|\, d\bar{z}_2.$$

De plus, J_1, J_2, J_3 sont intégrables si et seulement si $\tau = \theta$ c.à.d. si et seulement si u est holomorphe.

Par conséquent, si u est holomorphe, $\{J_1,\, J_2,\, J_3\}$ définissent une structure hyperhermitienne sur $(\bar{U}, g_u)$. Il suffit alors de remarquer que la structure de Weyl définie par $\{J_1,\, J_2,\, J_3\}$ est fermée si et seulement si $d\theta = 0$ ce qui est équivalent à $\partial u/\partial z_1 = 0$, pour voir que $(\bar{U}, g_u)$ est une variété admettant des spineurs parallèles par rapport à une structure de Weyl non-fermée quelle que soit la fonction holomorphe u sans zéros sur U et satisfaisant $\partial u/\partial z_1 = 0$.

Chapter 9

On Kirchberg's inequality for compact Kähler manifolds of even complex dimension

Ce chapitre, qui peut être lu indépendamment des autres parties de la thèse, contient des résultats nouveaux concernant les variétés kähleriennes de dimension complexe paire satisfaisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Kirchberg sur la première valeur propre de l'opérateur de Dirac.

Résumé. – En 1986 K.-D. Kirchberg a montré que toute valeur propre de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne compacte (M^{2m}, g) de dimension complexe paire satisfait l'inégalité $\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} \inf_M S$, où S est la courbure scalaire. Il est conjecturé que les variétés pour lesquelles le cas d'égalité est atteint sont des produits $T^2 \times N$, où T^2 est un tore plat et N est l'espace de twisteurs d'une variété quaternionienne Kähler à courbure scalaire positive. Ce résultat a été annoncé en 1990 par A. Lichnerowicz (cf. [46]), mais il semble que sa démonstration ne marche que si le tenseur de Ricci est parallèle. Dans ce chapitre on obtient plusieurs résultats sur les variétés-limites de l'inégalité de Kirchberg, et on démontre la conjecture ci-dessus dans certains cas particuliers.

Abstract. – In 1986 K.-D. Kirchberg showed that each eigenvalue of the Dirac operator on a compact Kähler manifold (M^{2m}, g) of even complex dimension satisfies the inequality $\lambda^2 \geq \frac{m}{4(m-1)} \inf_M S$, where by S we denote the scalar curvature. It is conjectured that the manifolds for the limiting case of this inequality are products $T^2 \times N$, where T^2 is a flat torus and N is the twistor space of a quaternionic Kähler manifold of positive scalar curvature. In 1990 A. Lichnerowicz announced an affirmative answer for this conjecture (cf. [46]), but his proof seems to work only when assuming that the Ricci tensor is parallel. The aim of this chapter is to prove several results about manifolds satisfying the limiting case of Kirchberg's inequality and to prove the above conjecture in some particular cases.

Classification AMS. – 53A50.

Mots-clés. – opérateur de Dirac, inégalité de Kirchberg.

9.1 Introduction

The first inequality on the eigenvalues of the Dirac operator on a compact spin manifold (M, g) was obtained in 1980 by T. Friedrich ([14]), who showed that

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4\,(n-1)} \inf_M S, \tag{9.1}$$

where S is the scalar curvature of M. Of course, this inequality is interesting only for manifolds with positive scalar curvature. In order to obtain it, Friedrich considered a modified connection and used the Lichnerowicz formula ([44]). The eigenspinors corresponding to eigenvalues in the limiting case of the inequality (9.1) are just the Killing spinors of M. The manifolds carrying Killing spinors were classified by C. Bär in [1].

In 1984, O. Hijazi ([25], [26]) showed that a Kähler manifold doesn't admit Killing spinors, i.e. the inequality (9.1) is always strict for Kähler manifolds. In the Kählerian case Friedrich's inequality was improved by K.-D. Kirchberg (cf. [35]) who showed that each eigenvalue λ of the Dirac operator on a compact spin Kähler manifold $(M^{2\,m}, g)$ satisfies

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4\,m} \inf_M S, \quad \text{if } m \text{ is odd}, \tag{9.2}$$

and

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4\,(m-1)} \inf_M S, \quad \text{if } m \text{ is even}, \tag{9.3}$$

Kähler manifolds satisfying the limiting case in these inequalities are called limiting manifolds. In the odd case, limiting manifolds admit Kählerian Killing spinors ([27]) and they were classified by the author (cf. [49]) in 1994.

On the other hand, limiting manifolds of even complex dimension admit spinors satisfying a more complicated equation (cf. [37], [19]) and moreover the product $T^2 \times N$ of a flat torus and an odd-dimensional limiting manifold is an even-dimensional limiting manifold. It is conjectured that each even-dimensional limiting manifold can be constructed in this way.

In 1990 A. Lichnerowicz announced a solution of this conjecture (cf. [46]) but when taking a derivative at the fourth line from the bottom of page 720, he chooses an orthonormal frame adapted with respect to the eigenvalues of the Ricci tensor and parallel in a point, so it seems that his proof only works when assuming that the Ricci tensor is parallel. The aim of this paper is to deduce several results about even-dimensional limiting manifolds, the most important being the following

Theorem. *The Ricci tensor of a limiting manifold has two eigenvalues, 0 and* $S/(n-2)$, *with multiplicities* 2 *and* $n-2$ *respectively.*

The author is very indebted to P. Gauduchon for his competent advises and his important contribution to the preparation of this work.

9.2 Previous results

We use the following terminology, taken from [19]. Let (M^{2m}, g, J) be an even-dimensional compact spin Kähler manifold ($m = 2\,l$) and ΣM the spinor bundle of M. On ΣM there is an action of the exterior forms on M, given by

$$\omega \cdot \Psi = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) e_{i_1} \cdot ... \cdot e_{i_k} \cdot \Psi \ .$$

With respect to this action, the Kähler form of M, Ω, defines a decomposition

$$\Sigma M = \oplus_{q=0}^{m} \Sigma^q M,$$

where $\Sigma^q M$ is the eigenbundle of rank C_m^q associated to the eigenvalue $i\,\mu^q = i\,(m - 2\,q)$ of Ω. Via this decomposition, every spinor Ψ can be uniquely written in the form

$$\Psi = \sum_{q=0}^{m} \Psi^q.$$

For $q \in \{0, ..., m\}$ denote by c^q the restriction of the Clifford contraction c to $T^*M \otimes \Sigma^q M$. We then have

$$c^q = c^q_+ + c^q_-, \tag{9.4}$$

where c^q_+ and c^q_-, who take their values in $\Sigma^{q+1}M$, and $\Sigma^{q-1}M$ respectively, are given by

$$c^q_+(\alpha \oplus \psi) = \frac{1}{2}(\alpha - iJ\alpha) \cdot \psi, \tag{9.5}$$

$$c^q_-(\alpha \oplus \psi) = \frac{1}{2}(\alpha + iJ\alpha) \cdot \psi, \tag{9.6}$$

$\forall \alpha \in T^*_x M, \ \forall \psi \in \Sigma^q_x M, \ \forall x \in M.$

One can introduce a natural decomposition of the Dirac operator restricted to sections of $\Sigma^q M$ into

$$D = D_+ + D_-, \tag{9.7}$$

where D_+ and D_- are defined by

$$D_+ = c_+^q \circ \nabla \quad , \quad D_- = c_-^q \circ \nabla. \tag{9.8}$$

Gauduchon introduce then the Kählerian Penrose operator given by

$$Q_X^q \Psi = \nabla_X \Psi + \frac{1}{4(q+1)}(X + iJX) \cdot D_+ \Psi + \frac{1}{4(m-q+1)}(X - iJX) \cdot D_- \Psi.$$

Using this operator and a simple algebraic lemma, he easily obtain Kirchberg's inequalities and the necessary conditions for the equality case to occur. Namely, we have the following

Theorem 9.2.1 (cf. [19], [27], [35], [46]) *Let (M, g) be a compact spin Kähler manifold of (real) dimension $n = 2\,m = 4\,l$. Then every eigenvalue λ of the Dirac operator of M satisfies the inequality (9.3). The equality holds iff there exists a spinor $\Psi \in \Sigma^{l+1} M$ satisfying*

$$\nabla_X \Psi = -\frac{1}{n}(X - iJX) \cdot D\Psi \tag{9.9}$$

and

$$D^2 \Psi = D_+ D\Psi = \lambda^2 \Psi \tag{9.10}$$

One then easily obtain

$$\Omega \cdot \Psi = 2i\Psi \quad , \quad \Omega \cdot D\Psi = 0 \tag{9.11}$$

From now on, we will always suppose $n > 4$. The case $n = 4$ was completely solved by T. Friedrich in [15].

Straightforward computations, that we will not reproduce here yield the following

Lemma 9.2.1 *For $n > 4$ and M as above, the following formulas hold*

$$\nabla_X D\Psi = -\frac{1}{4}(\mathrm{Ric}(X) + iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi \tag{9.12}$$

$$K(X - iJX) \cdot \Psi = (\mathrm{Ric}(X) - iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi \tag{9.13}$$

$$K(X - iJX) \cdot D\Psi = (\mathrm{Ric}(X) - iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot D\Psi \tag{9.14}$$

$$\rho \cdot \Psi = iK\Psi \quad , \quad \rho \cdot D\Psi = -iKD\Psi \tag{9.15}$$

$$\nabla_X \rho \cdot \Psi = 0 \quad , \quad \nabla_X \rho \cdot D\Psi = -i(Ric^2(X) - K\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi, \tag{9.16}$$

where ρ is the Ricci form, Ric is the Ricci tensor and $K = \frac{S}{n-2}$.

As standard references for these formulas see [19], [37]. One should note however a slight difference between the notations of [37] and ours, due to the fact that our Ψ is just Kirchberg's $\mathbf{j}\psi^{l-1}$, $\mathbf{j}$ being the canonical $\mathbf{C}$-anti-linear quaternionic (resp. real) structure of the spinor bundle. This is why all the complex vectors appearing in [37] have to be conjugated in our notations.

9.3 The eigenvalues of the Ricci tensor of a limiting manifold

Let us define the 2-forms

$$\rho_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \wedge J\mathrm{Ric}^s(e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i \cdot J\mathrm{Ric}^s(e_i), \tag{9.17}$$

and consider the following six propositions:

(a_s) : $trace(\mathrm{Ric}^s) = (n-2)K^s$;
(b_s) : $\rho_s \cdot \Psi = iK^s\Psi$;
(c_s) : $\rho_s \cdot D\Psi = -iK^s D\Psi$;
(d_s) : $\nabla_X \rho_s \cdot \Psi = 0$;
(e_s) : $\nabla_X \rho_s \cdot D\Psi = -i(\mathrm{Ric}^{s+1}(X) - K^s\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi$;
(f_s) : $\delta\rho_s = 0$.

By the above formulas, all these propositions are true for $s = 1$. We will now prove that they are actually true for all s:

Theorem 9.3.1 *The following implications hold :*

1. $(a_s) \Longrightarrow (b_s)\,,\,(c_s)$;
2. (b_s) *and* $(c_s) \Longrightarrow (d_s)$ *et* (e_s);
3. (a_s) *and* $(f_{s-1}) \Longrightarrow (f_s)$;
4. $(d_s)\,,\,(e_s)\,,\,(f_s) \Longrightarrow (a_{s+1})$.

Proof. Let $x \in M$ and consider an orthonormal basis $\{X_i, X_a\}$, adapted with respect to the Ricci tensor in the sense that $\mathrm{Ric}(X_i) = KX_i$, $i \in \{1, \ldots, n-r\}$ and $\mathrm{Ric}(X_a) = \mu_a X_a$, $a \in \{1, \ldots, r\}$, with $\mu_a \neq K$.

1. Suppose (a_s) is true. We then have

$$\sum_{a=1}^{r} (\mu_a^s - K^s) = trace(\mathrm{Ric}^s) - nK^s = -2K^s, \tag{9.18}$$

so

$$\begin{aligned}
(\rho_s - K^s\Omega) \cdot \Psi &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r}(\mu_a^s - K^s)X_a \cdot J(X_a) \cdot \Psi \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{r}(\mu_a^s - K^s)X_a \cdot (-i)X_a \cdot \Psi \\
&= \frac{i}{2}\sum_{a=1}^{r}(\mu_a^s - K^s)\Psi = -iK^s.
\end{aligned}$$

We then use (9.11).

2. The relation

$$\rho_s \cdot X = X \cdot \rho_s + 2J\mathrm{Ric}^s(X), \tag{9.19}$$

gives

$$\begin{aligned}
\nabla_X \rho \cdot \Psi &= \nabla_X(\rho_s \cdot \Psi) - \rho_s \cdot \nabla_X \Psi = iK^s \nabla_X \Psi + \frac{1}{n}(X - iJX) \cdot D\Psi \\
&= \frac{-i}{n}K^s(X - iJX) \cdot D\Psi + \frac{1}{n}(X - iJX) \cdot \rho_s \cdot D\Psi \\
&\quad + \frac{2i}{n}(\mathrm{Ric}^s(X) - iJ\mathrm{Ric}^s(X)) \cdot D\Psi \\
&= \frac{-2i}{n}K^s(X - iJX) \cdot D\Psi + \frac{2i}{n}(\mathrm{Ric}^s(X) - iJ\mathrm{Ric}^s(X)) \cdot D\Psi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

and similarly,

$$\begin{aligned}
\nabla_X \rho \cdot D\Psi &= \nabla_X(\rho_s \cdot D\Psi) - \rho_s \cdot \nabla_X D\Psi \\
&= -iK^s \nabla_X D\Psi + \frac{1}{4}\rho_s \cdot (\mathrm{Ric}(X) + iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi \\
&= \frac{i}{4}K^s(\mathrm{Ric}(X) + iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{4}(\mathrm{Ric}(X)+iJ\mathrm{Ric}(X))\cdot\rho_s\cdot\Psi-\frac{i}{2}(\mathrm{Ric}^{s+1}(X)\\
& +iJ\mathrm{Ric}^{s+1}(X))\cdot\Psi\\
= \; & -\frac{i}{2}(\mathrm{Ric}^{s+1}(X)-K^s\mathrm{Ric}(X)\\
& +iJ\mathrm{Ric}^{s+1}(X)-iJK^s\mathrm{Ric}(X))\cdot\Psi\\
= \; & -i(\mathrm{Ric}^{s+1}(X)-K^s\mathrm{Ric}(X))\cdot\Psi,
\end{aligned}
$$

where the last equality is justified by a repeated use of (9.13).

3. Let us first explicit in terms of the Ricci tensor the equality $\delta\rho_s=0$. If X is a vector field parallel in x and $\{e_i\}$ a local orthonormal frame parallel in x, we have

$$\delta\rho_s(X)=-\nabla_{e_i}\rho_s(e_i,X)=-\nabla_{e_i}\langle J\mathrm{Ric}^s(e_i),X\rangle=\langle\nabla_{e_i}\mathrm{Ric}^s(e_i),JX\rangle, \tag{9.20}$$

so

$$\delta\rho_s=0 \iff \nabla_{e_i}\mathrm{Ric}^s(e_i)=0. \tag{9.21}$$

From (a_s) we obtain

$$(\nabla_X\mathrm{Ric})(e_i,\mathrm{Ric}^{s-1}e_i)=trace(\nabla_X\mathrm{Ric}\circ\ \mathrm{Ric}^{s-1})=\frac{1}{s}\nabla_X(trace(\mathrm{Ric}^s))=0, \tag{9.22}$$

which gives

$$
\begin{aligned}
0 &= d\rho(Je_i,\mathrm{Ric}^{s-1}e_i,X)=(\nabla_{Je_i}\rho)(\mathrm{Ric}^{s-1}e_i,X)\\
&\quad +(\nabla_{\mathrm{Ric}^{s-1}e_i}\rho)(X,Je_i)+(\nabla_X\rho)(Je_i,\mathrm{Ric}^{s-1}e_i)\\
&= (\nabla_{Je_i}\mathrm{Ric})(J\mathrm{Ric}^{s-1}e_i,X)+(\nabla_{\mathrm{Ric}^{s-1}e_i}\mathrm{Ric})(JX,Je_i)\\
&\quad -(\nabla_X\mathrm{Ric})(e_i,\mathrm{Ric}^{s-1}e_i)\\
&= 2(\nabla_{e_i}\mathrm{Ric})(\mathrm{Ric}^{s-1}e_i,X)\\
&= 2\langle\nabla_{e_i}\mathrm{Ric}^s(e_i),X\rangle-2\mathrm{Ric}(\nabla_{e_i}\mathrm{Ric}^{s-1}(e_i),X),
\end{aligned}
$$

thus proving that (a_s) and (f_{s-1}) imply (f_s).

4. In (e_s) we put $X=e_i$, make the Clifford product with e_i and sum over i, to obtain

$$(d\rho_s+\delta\rho_s)\cdot D\Psi=i(trace(\mathrm{Ric}^{s+1}-K^s trace(\mathrm{Ric}))\Psi. \tag{9.23}$$

Taking the scalar product with Ψ in this formula and using (d_s) et (e_s) gives

$$(*)\qquad i(trace(\mathrm{Ric}^{s+1}-(n-2)K^{s+1})\langle\Psi,\Psi\rangle=\langle(d\rho_s)\cdot D\Psi,\Psi\rangle$$

$$= \langle D\Psi, d\rho_s) \cdot \Psi\rangle = \langle D\Psi, D\rho_s) \cdot \Psi\rangle = 0,$$

and as the support of Ψ is dense in M, we obtain (a_{s+1}).

QED

The reader can easily convince himself that the direct recurrence $(a_s) \Longrightarrow (a_{s+1})$ doesn't work: one has to use the intermediary formulas $(b_s) - (f_s)$.

The formulas (a_s) show that the sum of the s^{th} powers of the eigenvalues of Ric equals $(n-2)K^s$ for all s, so by Newton's relations we deduce the following result

Theorem 9.3.2 *The Ricci tensor of a limiting manifold has two eigenvalues, K and 0, the first one with multiplicity $n-2$ and the second one with multiplicity 2.*

9.4 Further results

Let us denote by E and F the two orthogonal and J-invariant distributions of M corresponding to these two eigenvalues of the Ricci tensor.

Consider the subspaces H and G of TM given by

$$H = \{X \in TM \mid (X - iJX) \cdot \Psi = (X - iJX) \cdot D\Psi = 0\},$$

$$G = \{X \in TM \mid \exists \alpha \in \mathbf{C},\ (X - iJX) \cdot \Psi = 0,\ (X - iJX) \cdot D\Psi = \alpha\Psi\}.$$

These subspaces are certainly no sub-bundles of TM since the dimension of the fibers H_x and G_x need not to be constant. Nevertheless we have

Lemma 9.4.1 *Denote by π the projection $TM \to M$. It exists a dense open submanifold $\bar{M}$ of M such that the projections*

$$\pi^{-1}(\bar{M}) \cap H \to \bar{M}$$

and

$$\pi^{-1}(\bar{M}) \cap G \to \bar{M}$$

define two vector bundles.

Proof. Obviously H_x and G_x are complex vector subspaces of T_xM for each x. If we fix local complex coordinates $\{z_1, \ldots, z_m\}$ on a neighborhood U of x and a local basis Ψ_α of holomorphic sections of ΣU, then H is given by a system of the form

$$\sum_i f_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial z_i} = 0,$$
$$\sum_i g_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial z_i} = 0,$$

where $f_{i,\alpha}$ and $g_{i,\alpha}$ are linear combinations of the components of Ψ and $D\Psi$ with respect to the basis Ψ_α. The dimension of H_x is given by the rank of this system, which is constant on a dense open subset of U. As for G we have two cases: either the equation $(X - iJX) \cdot D\Psi = \Psi$ has generically no solution, and $G = H$ on a dense open subset of U, or this equation has locally some solution σ and one easily obtains that locally $G = \mathbf{C}\sigma \oplus H$.

It then suffices to take a finite atlas of M and to apply the previous argument in each of the coordinate neighborhoods, using the fact that, Ψ and $D\Psi$ being holomorphic (resp. anti-holomorphic), all the functions occurring here are analytic.

QED

The relations (9.13) and (9.14) show that $F \subset H$. Denote by $\bar{H} = \pi^{-1}(\bar{M}) \cap H$ and $\bar{G} = \pi^{-1}(\bar{M}) \cap G$ the fiber bundles over $\bar{M}$ given by Lemma 9.4.1. We also denote by $\bar{E}$ and $\bar{F}$ the restrictions of E and F to $\bar{M}$.

Lemma 9.4.2 *The distribution G is totally geodesic.*

Proof. Let X be a section of G and Y an element of G which satisfy, by definition

$$(X - iJX) \cdot \Psi = (Y - iJY) \cdot \Psi = 0, \tag{9.24}$$

$$(X - iJX) \cdot D\Psi = \alpha\Psi \text{ et } (Y - iJY) \cdot D\Psi = \beta\Psi, \tag{9.25}$$

for a local function α and a constant β. By derivation with respect to Y we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Y(X - iJX) \cdot \Psi + (X - iJX) \cdot \nabla_Y \Psi \\ &= \nabla_Y(X - iJX) \cdot \Psi - \frac{1}{n}(X - iJX) \cdot (Y - iJY) \cdot D\Psi \\ &= \nabla_Y(X - iJX) \cdot \Psi - \frac{1}{n}(X - iJX) \cdot \beta\Psi \\ &= (\nabla_Y X - iJ\nabla_Y X) \cdot \Psi \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y X - iJ\nabla_Y X)\cdot D\Psi &= \nabla_Y((X-iJX)\cdot D\Psi) - (X-iJX)\cdot\nabla_Y D\Psi \\
&= \nabla_Y(\alpha\Psi) + \frac{1}{4}(X-iJX)\cdot \\
&\quad (\mathrm{Ric}(Y) + iJ\mathrm{Ric}(Y))\cdot\Psi \\
&= Y(\alpha)\Psi + \alpha\nabla_Y\Psi \\
&\quad -\frac{1}{2}\langle X-iJX, \mathrm{Ric}(Y)+iJ\mathrm{Ric}(Y)\rangle\Psi \\
&= (Y(\alpha) - \frac{1}{n}\alpha\beta - \mathrm{Ric}(X,Y) - i\mathrm{Ric}(X,JY))\Psi,
\end{aligned}$$

showing that $\nabla_Y X \in G$.

QED

Let $\bar{N}$ be an integral manifold of the distribution $\bar{G}$. The compacity of M and the fact that $\bar{G}$ is totally geodesic allows us to "complete" $\bar{N}$ in the following sense : there exists an unique complete, totally geodesic submanifold N of M, containing $\bar{N}$ as an open submanifold.

Let ξ denote the projection on N of the vector field η defined by $\eta = -\frac{n}{2}d|\Psi|^2$. Obviously $J\xi$ is a Killing vector field of N, since $J\eta$ is a Killing vector field of M (straightforward calculation, using (9.9) and (9.12)), and N is totally geodesic. In an orthonormal frame $\{e_\alpha\}$ of N, ξ is given by

$$\xi + iJ\xi = e_\alpha\langle(e_\alpha - iJe_\alpha)\cdot D\Psi, \Psi\rangle, \tag{9.26}$$

or equivalently

$$\langle(Y - iJY)\cdot D\Psi, \Psi\rangle = \langle Y, \xi + iJ\xi\rangle \ \forall Y \in TN. \tag{9.27}$$

Taking $Y = \xi$ in (9.27) gives

$$\langle(\xi - iJ\xi)\cdot D\Psi, \Psi\rangle = |\xi|^2. \tag{9.28}$$

On the other hand, as $\xi \in G$, (9.28) implies

$$(\xi - iJ\xi)\cdot D\Psi = \frac{|\xi|^2}{|\Psi|^2}\Psi, \tag{9.29}$$

and by an easy computation we obtain

$$\nabla_\xi\xi = \xi(K|\Psi|^2 - \frac{1}{n}\frac{|\xi|^2}{|\Psi|^2}). \tag{9.30}$$

Consider now the distribution spanned by ξ and $J\xi$, defined at the points where ξ doesn't vanish. The relation (9.30) shows that this distribution is totally geodesic and shows, after some easy calculation, that the sectional curvature of the integral manifolds of this distribution equals $\frac{4K}{n}$. Consequently, each integral manifold is an open submanifold of a 2-sphere of constant curvature.

Theorem 9.4.1 *Suppose that one of the following holds:*
1° $H = F$ *(generically);*
2° $H = G$ *(generically);*
3° $\xi = 0$*;*
4° *The distributions* E *and* F *are holomorphic;*
5° *The restriction of the sectional curvature to* F *vanishes.*
Then the Ricci tensor of M *is parallel.*

Proof. We first show that 3° implies 2° and 2° implies 1°. If $\xi = 0$, take $Y \in G$, thus satisfying $(Y - iJY) \cdot D\Psi = \alpha\Psi$ for a certain α. Taking the scalar product with Ψ in this relation gives $\alpha|\Psi|^2 = \langle Y, \xi + iJ\xi\rangle = 0$, so $\alpha = 0$ at the points where $\Psi \neq 0$. Thus generically $H = G$. Now, since $\bar{H} = \bar{G}$, and $\bar{G}$ is totally geodesic, for every local section Y of $\bar{H}$ we have $\nabla_Y Y \in H$, so

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Y((Y - iJY) \cdot D\Psi) = (Y - iJY) \cdot \nabla_Y D\Psi \\ &= -\frac{1}{4}(Y - iJY) \cdot (\mathrm{Ric}(Y) + iJ\mathrm{Ric}(Y)) \cdot \Psi \\ &= \mathrm{Ric}(Y, Y)\Psi, \end{aligned}$$

so $\mathrm{Ric}(Y, Y) = 0$, which just means that $Y \in F$. Supposing now that 1° holds we will prove that F is parallel. Let X be a local section of F, thus satisfying

$$(X - iJX) \cdot D\Psi = 0. \tag{9.31}$$

Taking the covariant derivative of this equation in an arbitrary direction Y gives

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_Y((X - iJX) \cdot D\Psi) \\ &= (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot D\Psi - \frac{1}{4}(X - iJX) \cdot (\mathrm{Ric}(Y) + iJ\mathrm{Ric}(Y)) \cdot \Psi \\ &= (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot D\Psi + \frac{1}{4}(\mathrm{Ric}(Y) + iJ\mathrm{Ric}(Y)) \cdot (X - iJX) \cdot \Psi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\langle X - iJX, \mathrm{Ric}(Y) + iJ\mathrm{Ric}(Y)\rangle\Psi \\
= \;& (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot D\Psi,
\end{aligned}
$$

and similarly,

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla_Y((X - iJX) \cdot \Psi) \\
&= (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot \Psi - \frac{1}{n}(X - iJX) \cdot (Y - iJY) \cdot D\Psi \\
&= (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot \Psi + \frac{1}{n}(Y - iJY) \cdot (X - iJX) \cdot D\Psi \\
&= (\nabla_Y(X - iJX)) \cdot \Psi,
\end{aligned}
$$

showing that $\nabla_Y X \in \bar{H} = \bar{F}$. Thus $\bar{F}$ is a parallel distribution over $\bar{M}$, so F is parallel over M, by continuity. This is, of course, equivalent to the fact that the Ricci tensor is parallel.

Suppose now that $4°$ holds. Consider the $(1,1)$ tensor $\tilde{J}$ given by

$$\tilde{J} = \frac{2}{K}\mathrm{Ric} \circ J - J.$$

Equivalently, the restriction of $\tilde{J}$ to E is just J and its restriction to F is $-J$. It is easy to see that $\tilde{J}$ defines a complex structure on M, its integrability being verified by taking complex coordinates on the holomorphic distributions E and F. The Kähler form of the hermitian manifold $(M, \tilde{J})$ is just

$$\tilde{\Omega} = \frac{2}{K}\rho - \Omega,$$

so as ρ and Ω are closed, $\tilde{\Omega}$ is closed, too. This means that $(M, \tilde{J})$ is a Kähler manifold, so $\tilde{J}$ is parallel, thus showing that Ric is parallel.

Finally, suppose that $5°$ holds. The Weitzenböck formula applied to the Ricci form gives

$$\nabla^*\nabla\rho + \Re(\rho) = \Delta\rho = 0, \tag{9.32}$$

since ρ is harmonic. Theorem 9.3.2 and a straightforward computation (using for instance the Clifford formalism) show that $\Re(\rho)$ is just the restriction of the sectional curvature to F, so using (9.32) and integrating over M, we obtain that the Ricci form ρ is parallel.

QED

Bibliography

[1] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy,* Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509-521.

[2] H. BAUM, T. FRIEDRICH, R. GRUNEWALD, I. KATH, *Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds,* Seminarbericht **108**, Humboldt-Universität Berlin 1990.

[3] L. BERARD-BERGERY, *Sur de nouvelles Variétés Riemanniennes d'Einstein,* Publications de l'Institut E. Cartan No. 4 (Nancy) 1982, 1 - 60.

[4] A. L. BESSE, *Einstein Manifolds,* Springer-Verlag, New York 1987.

[5] E. BONAN, *Sur les variétés riemanniennes à groupe d'holonomie* G_2 *ou Spin(7),* C.R.Acad.Sci. Paris **262** (1966), 127 - 129.

[6] C. BOYER, *A note on Hyperhermitian four-Manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **102** No.1 (1988), 157-164.

[7] C.P.BOYER, K.GALICKI, B.M. MANN, *Quaternionic Reduction and Einstein Manifolds,* Commun. Anal. Geom. **2** (1993), 229-279.

[8] C.P.BOYER, K.GALICKI, B.M. MANN, *The Geometry and Topology of 3-Sasakian Manifolds,* Journ. Reine u. Angew. Math. **455** (1994), 183 - 220.

[9] R. L. BRYANT, *Metrics with Exceptional Holonomy,* Ann. Math. **126** (1987), 525 - 576.

[10] R. L. BRYANT, S. M. SALAMON, *On the Construction of some Complete Metrics with Exceptional Holonomy,* Duke Math. Journ. vol **58** (1989), 829 - 850.

[11] F. M. CABRERA, M. D. MONAR, A. F. SWANN, *Classification of G_2- Structures,* Preprint Odense 1994.

[12] M. J. DUFF, B. E. W. NILSON, C. N. POPE, *Kaluza - Klein Supergravity,* Physics Reports vol. **130** (1986), 1 - 142.

[13] E. B. DYNKIN, *Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras,* Amer. Math. Soc. Transl. (2) **6** (1957), 11-244.

[14] T. FRIEDRICH, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Manigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung,* Math. Nach. **97** (1980), 117-146.

[15] T. FRIEDRICH, *The Classification of* 4*-dimensional Kähler Manifolds with Small Eigenvalue of the Dirac Operator,* Math. Ann. **295** no.3 (1993), 565-574.

[16] T. FRIEDRICH, I. KATH, *Compact Seven-dimensional Manifolds with Killing Spinors,* Commun. Math. Phys. **133** (1990), 543 - 561.

[17] K. GALICKI, S. SALAMON, *On Betti Numbers of 3-Sasakian Manifolds,* Preprint ESI Vienna March 1995.

[18] P. GAUDUCHON, *Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$,* J. reine angew. Math. **469** (1995), 1-50.

[19] P. GAUDUCHON, *L'opérateur de Penrose kählérien et les inégalités de Kirchberg,* non-publié.

[20] G. W. GIBBONS, D. N. PAGE, C. N. POPE, *Einstein Metrics on S^3-, R^3- and R^4-Bundles,* Commun.Math.Phys. **127** (1990), 529-553.

[21] V. V. GORBATSEVITCH, A. L. ONISHCHIK, *Lie Transformation Groups,* in Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. 20 "Lie Groups and Lie Algebra", Springer - Verlag 1991.

[22] A. GRAY, *Vector Cross Products on Manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **141** (1969), 465 - 504.

[23] A. GRAY, *Weak Holonomy Groups,* Math. Zeitschrift **123** (1971), 290 - 300.

[24] R. HERMANN, *On the Differential Geometry of foliations,* Ann. Math. **72** (1960), 445-457.

[25] O. HIJAZI, *Opérateurs de Dirac sur les variétés riemanniennes : Minoration des valeurs propres,* Thèse de 3ème Cycle, Ecole Polytechnique (1984).

[26] O. HIJAZI, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors,* Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151-162.

[27] O. HIJAZI, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds,* Commun. Math. Phys. **160** (1994), 563-579.

[28] O. HIJAZI, J.-L. MILHORAT, *Minoration des valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés spin Kähler-quaternioniennes,* J. Math. Pures Appl. **74** (1995), 387–414.

[29] N. HITCHIN, *Harmonic Spinors,* Adv. in Math. **14** (1974), 1-55.

[30] S. ISHIHARA, M. KONISHI, *Real Contact 3-Structure and Complex Contact Structure,* Sea Bull. Math **3** (1979), 151-161.

[31] S. ISHIHARA, M. KONISHI, *Complex almost Contact Manifolds,* Kodai Math. J. **3** (1980), 385-396.

[32] D. JOYCE, *Explicit Construction of Self-dual 4-Manifolds,* Duke Math. J. **77** No.3 (1995), 519-552.

[33] D. JOYCE, *Compact Riemannian 7-Manifolds with Holonomy G_2 : I and II,* preprint 1994, Princeton.

[34] T. KASHIWADA, *A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure,* Nat. Sci. Reps. Ochanomizu Univ. **22** (1971), 1-2.

[35] K.-D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.

[36] K.-D. KIRCHBERG, *Compact Six-dimensional Kähler Spin Manifolds of Positive Scalar Curvature with the Smallest Possible first Eigenvalue of the Dirac Operator,* Math. Ann. **282** (1988), 157-176.

[37] K.-D. KIRCHBERG, *The first Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler Manifolds,* J. Geom. Phys. **7** (1990), 449-468.

[38] K.-D. KIRCHBERG et U. SEMMELMANN, *Complex Contact Structures and the first Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler Manifolds,* preprint, SFB 288, 1994.

[39] S. KOBAYASHI, *On Compact Kähler Manifolds with Positive Definite Ricci Tensor,* Ann. of Math. **74** (1961), 570-574.

[40] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *The Foundations of Differential Geometry,* (vol. II), Interscience Publishers, New York, 1969.

[41] A. LASCOUX, M. BERGER, *Variétés Kählériennes Compactes,* Lecture Notes in Mathematics 154, Berlin, 1970.

[42] B. LAWSON, M.-L. MICHELSON, *Spin Geometry,* Princeton University Press 1989.

[43] C. LE BRUN, *Fano Manifols, Contact Structures, and Quaternionic Geometry,* Int. J. Math. **6**, (1995), 419-437.

[44] A. LICHNEROWICZ, *Spineurs harmoniques,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. **257**, Série A-B (1963), 7-9.

[45] A. LICHNEROWICZ, *Spin Manifolds, Killing Spinors and Universality of the Hijazi Inequality,* Lett. Math. Phys. **3** (1987), 331-344.

[46] A. LICHNEROWICZ, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour une variété kählérienne et son cas limite,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. **311**, Série **I** (1990), 717-722.

[47] J.W. MILNOR, J.D. STASHEFF, *Characteristic Classes,* Princeton Univ. Press, New Jersey, 1974.

[48] A. MOROIANU et U. SEMMELMANN, *Kählerian Killing Spinors, Complex Contact Structures and Twistor Spaces,* à paraître dans C. R. Acad. Sci. Paris.

[49] A. MOROIANU, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes,* Commun. Math. Phys. **169** (1995), 373-384.

[50] B. O'NEILL, *The fundamental Equations of a Submersion,* Mich. Math J. **13** (1966), 459-469.

[51] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry,* Acad. Press, New York, 1983.

[52] W. REICHEL, *Über die Trilinearen alternierenden Formen in 6 und 7 Veränderlichen,* Dissertation Greifswald 1907.

[53] S. SALAMON, *Quaternionic Kähler Manifolds,* Invent. Math. **67** (1982), 143-171.

[54] S. M. SALAMON, *Riemannian Geometry and Holonomy Groups,* Pitsman Res. Notes in Math. **201**, Longman, Harlow 1989.

[55] S. SEIFARTH et U. SEMMELMANN, *The spectrum of the Dirac operator on the complex projective space* $P_{2q-1}(\mathbf{C})$, preprint, SFB 288, (1993).

[56] S. TANNO, *Killing vectors on contact Riemannian manifolds and fiberings related to the Hopf fibrations,* Tohoku Math. J. **23** (1971), 314-333.

[57] E. THOMAS, *Vector Fields on Manifolds,* Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 643 - 683.

[58] M. WANG, *Parallel Spinors and Parallel Forms,* Ann Global Anal. Geom. **7** (1989), 59-68.