# VARIÉTÉS À HOLONOMIES SPÉCIALES EN PETITES DIMENSIONS

Andrei Moroianu

CNRS – Ecole Polytechnique

16 novembre 2006

# Variétés différentiables

Sur une variété différentiable $M$ on peut considérer différents objets :

- fonctions $\quad\rightsquigarrow\quad \mathcal{C}^\infty(M)$
- champs de vecteurs $\quad\rightsquigarrow\quad \mathcal{X}(M)$
- champs de tenseurs (formes extérieures, formes bilinéaires, etc.) $\quad\rightsquigarrow\quad \mathcal{T}(M)$

# Connexions

Pour dériver ces objets par rapport aux vecteurs $\rightsquigarrow$ dérivée covariante (ou connexion) :

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

- $\mathbb{R}$–bilinéaire ;
- $\mathcal{C}^\infty(M)$–linéaire dans le premier argument (tensorialité) ;
- satisfaisant la relation de Leibniz par rapport au deuxième argument.

L'espace des connexions est un espace affine modelé sur l'espace des sections de $T^*M \otimes \mathrm{End}(M)$.

Toute connexion s'étend naturellement aux champs de tenseurs, en tant que dérivation qui commute avec les contractions. Exemple :

# Connexions

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y) &= C(\nabla_X\omega\otimes Y)\\ &= C(\nabla_X(\omega\otimes Y)-\omega\otimes\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X(C(\omega\otimes Y))-\omega(\nabla_X Y)\\ &= X(\omega(Y))-\omega(\nabla_X Y).\end{aligned}$$

L'expression

$$T^\nabla(X,Y):=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

est tensorielle en $X$ et $Y$ $\rightsquigarrow$ torsion de $\nabla$.

Un champ de tenseurs $K$ est parallèle sur $M$ si $\nabla_X K=0$ pour tout $X$. $K$ est parallèle le long d'un chemin $\gamma$ si $\nabla_{\dot\gamma}K=0$.

# Transport parallèle, holonomie

Transport parallèle : si $K_0 \in \mathcal{T}_x(M)$ et $\gamma(0) = x$, il existe un unique champ de tenseurs $K$ (défini) et parallèle le long de $\gamma$ avec $K_x = K_0$ (Cauchy–Lipschitz).

Tout lacet ($\mathcal{C}^\infty$ par morceaux) en $x \in M$ définit ainsi un isomorphisme de $T_xM$.

L'ensemble de ces isomorphismes $\rightsquigarrow$ groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}_x M \subset \mathrm{Gl}(T_xM)$.

Si $M$ connexe $\rightsquigarrow$ classe de conjugaison d'un sous–groupe de $\mathrm{Gl}_n$.

# Transport parallèle, holonomie

Le défaut de commutation des dérivées secondes $\rightsquigarrow$ courbure.

La courbure de $\nabla$ vue comme 2–forme à valeurs dans les endomorphismes :

$$R^{\nabla}(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

satisfait $R^{\nabla}(X,Y) \in \mathfrak{hol}_x M$.

Remarque. $\mathrm{Hol}(M) = \{1\} \iff$ il existe un repère global parallèle.

# Variétés riemanniennes

Une métrique riemannienne sur une variété $M$ est un champ de tenseurs $g$ symétrique et défini positif en chaque point. A l'aide de $g$ on identifie souvent vecteurs et 1–formes sur les variétés riemanniennes.

Connexion de Levi–Civita : l'unique connexion sur $(M, g)$

- métrique $\rightsquigarrow$ $\nabla g = 0$
  $\rightsquigarrow$ $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- sans torsion $\rightsquigarrow$ $T^\nabla = 0$ $\rightsquigarrow$ $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Exemples. $(\mathbb{R}^n, eucl)$ , $(N, h) \subset (M, g)$.

# Variétés riemanniennes

L'holonomie de $(M, g)$ est un sous–groupe de $\mathrm{O}_n$ ($\mathrm{SO}_n$ si $M$ orientable) $\rightsquigarrow$ la courbure $R(X, Y)$ anti–symétrique $\forall\ X, Y$.

Le tenseur riemannien de courbure totalement covariant $R(X, Y, Z, T) := g(R(X, Y)Z, T)$ satisfait les identités

- $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$ ;
- $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$ ;
- $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$ (première identité de Bianchi) ;
- $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$ (deuxième identité de Bianchi).

## Courbure riemannienne

Le tenseur de Ricci :

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{tr}(V \mapsto R(V, X)Y) = \sum R(e_i, X, Y, e_i)$$

est symétrique ; sa trace s'appelle la courbure scalaire. Une variété dont le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique s'appelle d'Einstein.

Le tenseur de courbure est l'obstruction à l'existence de coordonnées euclidiennes sur $M$ : Si $R = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hol}(M, g) = \{1\}$ $\rightsquigarrow \quad \exists$ repère parallèle $\quad \rightsquigarrow \quad M$ est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Hol}(M \times N) = \mathrm{Hol}(M) \times \mathrm{Hol}(N)$$

Corollaire. L'holonomie d'un produit riemannien agit réductiblement sur le fibré tangent.

# Théorème de Berger–Simons

Théorème. (décomposition de de Rham) Si $\mathrm{Hol}(M)$ réductible, $M$ est localement un produit riemannien.

Espaces (localement) symétriques : Variétés riemanniennes $(M, g)$ dont les symétries géodésiques sont des isométries.

$$\Updownarrow$$

$M = G/H$, $G$ : groupe de Lie, $H = G^\sigma$ : l'ensemble des points fixes d'une involution $\sigma$ de $G$, métrique induite par une forme bilinéaire symétrique $ad(H)$–invariante sur $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

$$\Updownarrow$$

Variétés riemanniennes $(M, g)$ à tenseur de courbure parallèle.

# Théorème de Berger–Simons

Théorème. (Berger, Simons) Une variété riemannienne simplement connexe irréductible est symétrique, ou bien son groupe d'holonomie est l'un des groupes suivants :

- $\mathrm{SO}_n$,
- $\mathrm{U}_m$, $\mathrm{SU}_m$ $(n = 2m)$,
- $\mathrm{Sp}_k$, $\mathrm{Sp}_k\mathrm{Sp}_1$ $(n = 4k)$,
- $G_2$ $(n = 7)$, $\mathrm{Spin}_7$ $(n = 8)$.

Rappel. $G_2$ est le stabilisateur dans $\mathrm{Gl}_7(\mathbb{R})$ de

$$\omega = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} + e^{356} \in \Lambda^3\mathbb{R}^7.$$

Remarque. Point fixe dans une représentation du groupe d'holonomie $\iff$ tenseur parallèle.

# Variétés kähleriennes

Définition. $(M^{2m}, g)$ s'appelle kählerienne s'il existe structure presque complexe unitaire parallèle $J$. Comme $\mathrm{U}_m = \mathrm{SO}_{2m} \cap \mathrm{Gl}_m(\mathbb{C}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hol}(M) \subset \mathrm{U}_m \iff M$ kählerienne.

Soit $(M^{2m}, g, J)$ kählerienne $\quad \rightsquigarrow \quad R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y)$ $\rightsquigarrow \quad \mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(JX, JY) \quad \rightsquigarrow$ forme de Ricci $\rho(X, Y) := \mathrm{Ric}(X, JY)$.

$\rho(X, Y) = i\mathrm{tr}^{\mathbb{C}} R(X, Y) \quad \rightsquigarrow \quad \rho = 0 \iff Hol(M) \subset \mathrm{SU}_m$ : variétés de Calabi–Yau.

Théorème. (Calabi, Yau) Si $(M, J)$ est une variété complexe compacte à $c_1 = 0$, alors dans chaque classe de Kähler il existe une unique métrique de Calabi–Yau. Exemple : les surfaces K3, les hypersurfaces de degré $m + 1$ dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$, etc.

# Variétés quaternion–Kähler

$I, J, K \in \mathrm{SO}_{4k}$ définis par la multiplication à gauche par $i, j, k$ sur $\mathbb{H}^k \simeq \mathbb{R}^{4k}$. $\mathrm{Sp}_1 = \langle I, J, K \rangle$, $\mathrm{Sp}_k =$ son centralisateur dans $\mathrm{SO}_{4k}$.

La représentation adjointe de $\mathrm{Sp}_k\mathrm{Sp}_1 \simeq \mathrm{Sp}_k \times \mathrm{Sp}_1/\{\pm 1\}$ sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^{4k})$ n'a pas de point fixe, mais est néanmoins réductible : elle laisse invariant l'espace engendré par $I, J, K$.

Définition. $(M, g)$ quaternion Kähler si $\mathrm{Hol}(M) \subset \mathrm{Sp}_k\mathrm{Sp}_1$. D'après ce qui précède, il existe un sous–fibré parallèle de rang 3 de $\mathrm{End}(TM)$. Son fibré unitaire : l'espace de twisteurs $\mathcal{Z}$.

La connexion de Levi–Civita de $M$ induit une distribution "horizontale", complémentaire en chaque point aux fibres $S^2$ de $\mathcal{Z} \to M \quad \rightsquigarrow \quad$ famille de métriques riemanniennes $g_t$ et 2 structures presque complexes, $\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-$ sur $\mathcal{Z}$.

# Variétés quaternion–Kähler

Théorème. (Salamon, Bérard Bergery) La variété $(\mathcal{Z}, g_{\frac{1}{2}}, \mathcal{J}^+)$ est Kähler–Einstein et possède une structure de contact holomorphe.

Théorème. (LeBrun, M.–Semmelmann) Toute variété Kähler–Einstein de contact est l'espace de twisteurs d'une variété quaternion–Kähler.

La structure presque complexe $\mathcal{J}^-$ n'est jamais intégrable. On a toutefois :

Théorème. (Nagy, Reyes–Carrión) $(\mathcal{Z}, g_1, \mathcal{J}^-)$ est nearly Kähler, d'Einstein et la distribution verticale est parallèle pour la connexion hermitienne (voir ci–dessous).

# Structures presque hermitiennes

Structure presque hermitienne :

- métrique riemannienne $g$
- structure presque complexe $J$
- compatibilité : $g(JX, Y) = -g(X, JY)$.

La forme de Kähler (ou fondamentale) :

$$\Omega(X, Y) := g(JX, Y)$$

est une 2–forme non–dégénérée : $\Omega^m = m! vol_g$.

# Structures presque hermitiennes

Tenseur de Nijenhuis :

$$N^J(X,Y) := \frac{1}{4}([X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]) = [X^{(0,1)},Y^{(0,1)}]^{(1,0)}.$$

$N^J$ : obstruction à l'existence de coordonnées holomorphes (théorème de Newlander–Nirenberg).

- $N^J = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ géométrie complexe (hermitienne).
- $d\Omega = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ géométrie symplectique (presque kählerienne).
- $N^J = 0$ et $d\Omega = 0 \Rightarrow \nabla J = 0$ : géométrie kählerienne.

Réciproquement, $\nabla J = 0 \Rightarrow N^J = 0$ et $d\Omega = 0$ car $\nabla J$ détermine entièrement $N^J = 0$ et $d\Omega = 0$.

# Classification de Gray–Hervella

Théorème. (Gray–Hervella) Sous l'action de $\mathrm{U}_m$ ($m \geq 3$), on a les décompositions suivantes :

- $\nabla J = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_2 + (\nabla J)_3 + (\nabla J)_4$
- $N^J = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_2$
- $d\Omega = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_3 + (\nabla J)_4$

Remarque. $(\nabla J)_1 = d\Omega^{(3,0)+(0,3)}$, $(\nabla J)_3 = d\Omega_0^{(2,1)+(1,2)}$, $(\nabla J)_4 = \Omega \lrcorner d\Omega$. Les trois premières composantes de $\nabla J$ sont invariantes aux changements conformes de la métrique.

# Classification de Gray–Hervella

Pour un ensemble d'indices $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$, une structure s'appelle de type $W_I$ si les composantes $(\nabla J)_j$ sont nulles quel que soit $j$ dans le complémentaire de $I$.

Exemples :

- type $W_2$ : structure symplectique
- type $W_{3,4}$ : structure hermitienne (complexe)
- type $W_1$ : Nearly Kähler, en particulier ni intégrable, ni symplectique.

# Connexions hermitiennes

**Définition.** Une connexion $\nabla$ sur une variété presque hermitienne $(M, g, J)$ s'appelle hermitienne si $\nabla g = 0$ et $\nabla J = 0$.

L'espace des connexions hermitiennes est un espace affine modelé sur l'espace des sections de $T^*M \otimes \Lambda^{1,1}M$.

La projection orthogonale de la connexion de Levi–Civita sur cet espace $\rightsquigarrow$ connexion hermitienne canonique $\bar{\nabla}$ :

$$\bar{\nabla}_X Y := \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J) Y.$$

# Variétés nearly Kähler

Définition. Une variété presque hermitienne $(M, g, J)$ est nearly Kähler (ou NK) si $(\nabla_X J)X = 0$, $\forall X \in TM$. $M$ s'appelle strictement nearly Kähler (SNK) si $\nabla_X J \neq 0$, $\forall X \in TM$.

Propriétés :

- $\nabla J$ (qui s'identifie à $N^J$, à $d\Omega$ et à la torsion de $\bar{\nabla}$) est parallèle par rapport à $\bar{\nabla}$.
- en dimension 4 : NK = Kähler
- en dimension 6 : une variété SNK :
  - admet une structure $\mathrm{SU}_3$ : $(g, J, d\Omega)$, $\bar{\nabla}$–parallèle.
  - admet des spineurs de Killing $\rightsquigarrow$ d'Einstein.

# Variétés nearly Kähler

Theorème. Une variété presque hermitienne $(M^6, g, J)$ est SNK si et seulement si le cône riemannien $\bar{M} := (M \times \mathbb{R}_+, t^2 g + dt^2)$ satisfait $\mathrm{Hol}(\bar{M}) \subset G_2$.

Idée de la démonstration : définir une 3–forme générique (au sens de Hitchin) :

$$\omega := t^2 dt \wedge \Omega + \frac{1}{3} t^3 d\Omega$$

et vérifier que $\omega$ est parallèle $\iff$ $(M^6, g, J)$ est NK.

Corollaire. La sphère ronde $(S^6, can)$ est SNK, par rapport à la structure presque complexe induite par

$$\omega = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} + e^{356}.$$

# Exemples de variétés NK

- Les variétés kähleriennes.
- Les espaces de twisteurs des variétés QK à $Scal > 0$, avec la structure presque complexe non–intégrable $\mathcal{J}^-$.
- Les espaces 3–symétriques naturellement réductifs : Espaces homogènes $G/H$, avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, où $H$ est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme $\sigma$ de $G$ d'ordre 3 qui définit une structure complexe sur $\mathfrak{m}$ par la relation $\sigma_* = -\frac{1}{2} Id + \frac{\sqrt{3}}{2} J$ ; Exemple : $G \times G \times G/G$, en particulier $S^3 \times S^3$.
- En dimension 6 :
    - $S^6$
    - $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, $F(1,2)$
    - $S^3 \times S^3$

## Connexion canonique d'une $G$–structure

Soit $(M^n, g)$ une variété riemannienne orientée et $G \subset \mathrm{SO}_n$ compact. Une $G$–structure sur $M \quad \rightsquigarrow \quad$ réduction du fibré des repères orthonormés à $G$. Si $G$ est le stabilisateur d'un élément d'une certaine représentation de $\mathrm{SO}_n$, $G$–structure $\iff$ section du fibré vectoriel associé. Exemple : $G = U_m \subset \mathrm{SO}_{2m}$.

La connexion de Levi–Civita n'est pas toujours une $G$–connexion. Sa projection sur l'espace des $G$–connexions : connexion canonique.

Cleyton et Swann ont étudié le cas des $G$–structures spéciales, c'est à dire satisfaisant :

- L'holonomie de la connexion canonique $\bar{\nabla}$ agit irréductiblement sur $\mathbb{R}^n$.
- La torsion de $\bar{\nabla}$ est totalement antisymétrique et $\bar{\nabla}$–parallèle.

# Théorème de Cleyton et Swann

Rappel. Variétés riemanniennes à holonomie irréductible :

- variétés à holonomie $U_m$, $\mathrm{SU}_m$, $\mathrm{Sp}_k$, $\mathrm{Sp}_k\mathrm{Sp}_1$, $G_2$, $\mathrm{Spin}_7$
- espaces symétriques à isotropie irréductible

Theorème. (Cleyton, Swann) Les $G$–stuctures spéciales sont :

- soit des variétés à holonomie faible $\mathrm{SU}_3$ et $G_2$
- soit des espaces homogènes à isotropie irréductible

# Décomposition des variétés NK

Une variété NK est une $U_m$–structure qui satisfait automatiquement la deuxième condition des $G$–structures spéciales. Le théorème de Cleyton et Swann ne dit rien dans le cas où la représentation du groupe d'holonomie de $\bar{\nabla}$ est réductible (et il n'y a pas d'analogue du théorème de de Rham pour les connexions à torsion).

Théorème. (Nagy) Toute variété NK est localement un produit riemannien de

- variétés kähleriennes.
- espaces de twisteurs de variétés QK
- espaces 3–symétriques naturellement réductifs
- variétés NK de dimension 6.

# Variétés NK homogènes

Corollaire. La classification des variétés NK homogènes se réduit à la dimension 6.

Théorème. (Butruille) Toute variété SNK homogène est un espace 3–symétrique naturellement réductif.

Problème algébrique. Difficulté : plus l'isotropie est petite, plus cela devient compliqué. Cas le plus difficile : $S^3 \times S^3$ (système quadratique à 72 inconnues)...

Rappel. Toute variété QK homogène est symétrique (Wolf, Alekseevski).

# Autres résultats

Théorème. (Reyes–Carrión) La distribution verticale sur l'espace de twisteurs (NK) d'une variété QK positive est parallèle par rapport à la connexion hermitienne canonique.

Théorème. (Belgun–M., Nagy) Toute variété SNK dont l'holonomie de la connexion hermitienne canonique est réductible est isométrique à $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, $F(1,2)$ (ou à un espace de twisteurs en dimension supérieure à 6).

Théorème. (M.–Nagy–Semmelmann) La seule variété SNK de dimension 6 admettant des champs de Killing unitaires est $S^3 \times S^3$.

# NK versus QK

| | nearly Kähler $M^6$ | quaternion Kähler $M^{4k}$ |
|---|---|---|
| courbure | $R = R^{CY} + R^{S^6}$ | $R = R^{hyper} + R^{\mathbb{HP}^k}$ |
| Einstein | oui | oui |
| classification dans le cas homogène | 3–symétriques (Butruille) | symétriques (Wolf, Alekseevski) |
| autres exemples | non | non |
| rigidité | ... (M.–N.–S.) | oui (LeBrun–Salamon) |

# Problèmes ouverts

- En géométrie quaternion Kähler
  - classification des variétés QK positives
  - classification des variétés Fano de contact
- En géométrie NK
  - variétés SNK de cohomogénéité 1
  - variétés SNK toriques
  - exemples de SNK non–homogènes
- espaces $K$–symétriques