Spații omogene stabil complexe

Andrei Moroianu, CNRS
(în colaborare cu Paul Gauduchon și Uwe Semmelmann)

Colocviu IMAR – 15 aprilie 2015

Introducere

Planul expunerii :

- Varietăți diferențiabile stabil complexe
- Spații simetrice
- Clasificarea spațiilor simetrice compacte stabil complexe
- Clasificarea spațiilor omogene compacte de caracteristică Euler nenulă stabil complexe

Bibliografie :

P. Gauduchon, A. Moroianu, U. Semmelmann. *Almost complex structures on quaternion-Kähler manifolds and inner symmetric spaces*, Invent. Math. **184**, 389-403 (2011).
A. Moroianu, U. Semmelmann. *Weakly complex homogeneous spaces*, J. reine angew. Math. **691**, 229-244 (2014).

Partea I

Varietăți diferențiabile stabil complexe

Fibrați vectoriali peste varietăți diferențiabile

Definiție

Fie M o varietate diferențiabilă și $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Un $\mathbb{K}$-fibrat vectorial de rang k peste M este o varietate diferențiabilă E împreună cu o submersie $\pi : E \to M$ cu proprietățile următoare :

1. $\forall x \in M$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ este un $\mathbb{K}$-spațiu vectorial de dimensiune k.
2. (trivialitate locală) $\forall\ x \in M$, $\exists\ U \ni x$ deschis și $\varphi : U \times \mathbb{K}^k \to \pi^{-1}(U)$ difeomorfism, $\varphi|_{\{x\}\times\mathbb{K}^n} \to E_x$ isomorfism de $\mathbb{K}$-spații vectoriale.

Exemple

- Fibratul trivial $E = \xi_k := M \times \mathbb{K}^k$, $\pi := \pi_1$.
- Fibratul tangent $E = \mathrm{T}M$, fibrat real de rang $\dim(M)$.

Generalități despre fibrați

Definiție

Secțiune : $\sigma : M \to E$, $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Definiție

Morfism de $\mathbb{K}$-fibrați : aplicație netedă $f : E \to F$ care păstrează fibrele ($\pi_F \circ f = \pi_E$) și $\forall\, x \in M$, $f : E_x \to F_x$ $\mathbb{K}$-liniară.

Observații :

- Studiul fibraților : până la izomorfism.
- Nu orice fibrat este izomorf cu fibratul trivial : orice secțiune netedă a lui $\mathrm{T}S^2$ se anulează.
- Sume directe, produse tensoriale de fibrați...

Generalități despre fibrați

E fibrat complex $\rightsquigarrow$ $\bar{E}$ (fibratul conjugat).

Functori intre categoriile de fibrați reali și complecși :

Functorul de "uitare" $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}$ si complexificarea $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$:

- $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}(E) = E^{\mathbb{R}}$, $E^{\mathbb{R}}_x = E_x$ ca spațiu vectorial real.
- $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}(E) = E^{\mathbb{C}}$, $E^{\mathbb{C}}_x = E_x \otimes \mathbb{C}$.

$\mathcal{F}^{\mathbb{R}} \circ \mathcal{F}^{\mathbb{C}}(E) = E \oplus E, \quad \mathcal{F}^{\mathbb{C}} \circ \mathcal{F}^{\mathbb{R}}(E) = E \oplus \bar{E}.$

Observație

Un fibrat real E este în imaginea lui $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}$ $\iff$ admite un automorfism J cu $J \circ J = -\mathrm{id}$. (structură complexă)

Clase caracteristice

- E complex $\rightsquigarrow$ clase Chern $c_k(E) \in H^{2k}(M)$.
- $c_k(\bar{E}) = (-1)^k c_k(E)$.
- E real $\rightsquigarrow$ clase Pontriaghin $p_k(E) \in H^{4k}(M)$, $p_k(E) = c_{2k}(E^{\mathbb{C}})$.
- Caracterul Chern $ch_k(E) \in H^{2k}M$, $ch_k(E) = S_k(c_1(E), \dots, c_k(E))$, unde S_k este polinomul care asociază funcțiilor simetrice elementare a n variabile $(n \geq k)$ suma puterilor k : $x_1^k + \dots + x_n^k = S_k(\sigma_1(x_i), \dots, \sigma_k(x_i))$.
- $ch(E) = \sum ch_k(E)$ este multiplicativ și aditiv : $ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)$, $ch(E \otimes F) = ch(E) \cdot ch(F)$.
- $ch(E) = rk(E) \in H^0(M)$ dacă E este fibrat trivial complex.

Stabilitate

Definiție

Un fibrat se numește stabil trivial dacă devine trivial dupa sumă directă cu un fibrat trivial : $\xi_p \oplus E \cong \xi_{p+k}$.

Exemplu : $\mathrm{T}S^n \oplus \mathrm{N}S^n \cong \xi_{n+1}$.

Lemă

Clasele Pontriaghin ale unui fibrat real stabil trivial sunt nule :
$\xi_p \oplus E \cong \xi_{p+k} \implies \xi_p^{\mathbb{C}} \oplus E^{\mathbb{C}} \cong \xi_{p+k}^{\mathbb{C}} \implies p + ch(E^{\mathbb{C}}) = p + k$.

Nu orice fibrat este stabil trivial :

Exemplu

$ch(\mathrm{T}\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, unde $\alpha \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ este un generator.
$ch((\mathrm{T}\mathbb{C}\mathrm{P}^n)^{\mathbb{C}}) = (1+\alpha)^{n+1} + (1-\alpha)^{n+1} \implies$
$p_1(\mathrm{T}\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = (n+1)(n+2)\alpha^2$ este ne-nul pentru $n \geq 2$.

Fibrati stabil complecși

Definiție

Un fibrat real E se numește stabil complex dacă există un fibrat trivial ξ_p și un fibrat complex F astfel încât

$$\xi_p \oplus E \cong F^{\mathbb{R}}.$$

Un fibrat real stabil trivial este stabil complex.

Definiție

O varietate diferențiabilă M se numește :

- complexă dacă are un sistem de coordonate complexe cu schimbari de hartă olomorfe ;
- aproape complexă dacă fibratul tangent este complex $(\mathrm{T}M \cong F^{\mathbb{R}})$;
- stabil complexă dacă $\mathrm{T}M$ este stabil complex.

Varietăți aproape complexe

Complex $\Longrightarrow$ aproape complex $\Longrightarrow$ stabil complex.

Teorema Newlander-Nirenberg (1950)

O varietate aproape complexă este complexă $\Longleftrightarrow$ tensorul Nijenhuis se anulează.

Exemplu : cazul sferelor S^n

- S^n stabil complexă $\forall\ n$
- S^2 și S^6 aproape complexe
- S^4 nu e aproape complexă (Ehresmann, Hopf, 1949)
- S^{2n} nu e aproape complexă pentru $n \geq 4$ (Borel, Serre, 1953)
- S^2 complexă (suprafață Riemann)
- S^6 ? ?

Varietăți stabil complexe

Problemă

Care varietăți compacte sunt stabil complexe ?

Lemă

$M \times N$ stabil complexă $\iff$ M și N stabil complexe.
Demonstrație : $\mathrm{T}(M \times N)|_{M\times\{y\}} \cong \mathrm{T}M \oplus \xi_n$.

Exemple simple de varietăți pentru care putem încerca să răspundem la problema de mai sus :

- S^n, $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$...
- Spațiile simetrice
- Spațiile omogene

Partea a II-a

Spații simetrice

Definiții

Definiții echivalente

O varietate riemanniană simplu conexă compactă (M, g) se numește simetrică dacă

- Simetriile geodezice in jurul fiecărui punct sunt izometrii ;
- $\nabla R = 0$;
- Grupul de izometrii G acționează tranzitiv pe M și există $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $\sigma^2 = \mathrm{id}$ ale cărui puncte fixe formează grupul de izotropie H al unui punct din M.

$M = G/H$ se numește interior dacă σ e automorfism interior ($\iff \mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H)$).

Exemplu

$S^n = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ interior $\iff$ n par.

Clasificarea spațiilor simetrice

Clasificarea spațiilor simetrice

Perechile simetrice (G, H) au fost clasificate de Cartan in 1926. În cazul compact și interior, spațiile corespunzătoare sunt produse de :

- Grassmaniene reale orientate $\widetilde{\mathrm{Gr}}_p(\mathbb{R}^{p+q}) := \mathrm{Spin}(p+q)/\mathrm{Spin}(p)\mathrm{Spin}(q)$;
- Grassmaniene quaternionice $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{H}^{p+q}) := \mathrm{Sp}(p+q)/\mathrm{Sp}(p)\mathrm{Sp}(q)$;
- Spații simetrice hermitice (atunci când H nu e semi-simplu) ;
- Spații Wolf (H este normalizatorul unui subgrup $\mathrm{Sp}(1) \subset G$ corespunzător unei radacini maximale) ;
- $\mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$; $\mathrm{E}_7/\mathrm{SU}(8)$; $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$.

Spații simetrice stabil complexe

Care spații simetrice sunt stabil complexe ? Rezultate clasice :

- $\widetilde{\mathrm{Gr}}_p(\mathbb{R}^{p+q})$ nu sunt s.c. pentru $p, q \geq 3$ (Sankaran, Tang 1994) cu câteva excepții : $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^8)$, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_4(\mathbb{R}^{10})$, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_6(\mathbb{R}^{12})$;
- $\mathrm{Gr}_p(\mathbb{H}^{p+q})$ nu sunt s.c. dacă $p + q \geq 3$ (Hirzebruch 1953, Milnor 1958, Massey 1962, Hsiang, Sczarba 1964) ;
- Spații simetrice hermitice sunt complexe ;
- Spațiile Wolf ? ?
- $\mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$ nu e aproape complex (Borel, Hirzebruch 1958) ;
- $\mathrm{E}_7/\mathrm{SU}(8)$, $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$? ?

Teoremă (Gauduchon, M., Semmelmann 2011)

Un spațiu simetric compact interior e stabil complex $\iff$ produs de sfere și spații simetrice hermitice.

O consecință a stabilității complexe

Teoremă (Gauduchon, M., Semmelmann 2011)

Fie M^{4n} o varietate spin, compactă, stabil complexă și E un fibrat complex auto-dual peste M ($E \cong \bar{E}$). Atunci indexul operatorului Dirac twistat cu $E \otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{D}_{E\otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}} : C^\infty(\Sigma^+ M \otimes E \otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}) \to C^\infty(\Sigma^- M \otimes E \otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}})$$

este par.

Demonstratie. M stabil complexă $\implies \mathrm{T}M \oplus \xi_p \cong \tau^{\mathbb{R}} \implies p$ este par și $\mathrm{T}M^{\mathbb{C}} \oplus \xi_p^{\mathbb{C}} \cong \tau \oplus \bar{\tau}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\tau}) + \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\bar{\tau}}) &= \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes(\tau\oplus\bar{\tau})}) \\
&= \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}}) + \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\xi_p^{\mathbb{C}}}) \\
&= \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}}) + p\,\mathrm{ind}(\mathcal{D}_E).
\end{aligned}$$

O consecință a stabilității complexe

E suficient să verificăm $\mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\tau}) = \mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\bar{\tau}})$.Teorema clasică Atiyah-Singer :

$$\mathrm{ind}\left[\mathcal{D} : C^\infty(\Sigma^+ M) \to C^\infty(\Sigma^- M)\right] = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M),$$

unde $\hat{\mathrm{A}}(M) \in H^*(M)$ este un polinom în clasele Pontriaghin.
Mai general, pentru orice fibrat complex F :

$$\mathrm{ind}\left[\mathcal{D}_F : C^\infty(\Sigma^+ M \otimes F) \to C^\infty(\Sigma^- M \otimes F)\right] = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M) ch(F).$$

Pentru $F := E \otimes \tau$

$$\mathrm{ind}(\mathcal{D}_{E\otimes\tau}) = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M) ch(E) ch(\tau).$$

$E \cong \bar{E} \implies ch_k(E) = (-1)^k ch_k(\bar{E}) = (-1)^k ch_k(E) \implies ch(E) \in H^{4*}(M)$.

O obstrucție la stabilitea complexă

Corolar

Dacă pe o varietate spin, compactă, M^{4n} există un fibrat complex auto-dual E astfel încât indexul operatorului Dirac twistat cu $E \otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}$ este impar, atunci M nu este stabil complexă.

Partea a III-a

Indexul spațiilor simetrice compacte

Formula de dimensiune a lui Weyl

Fie $M = G/H$ un spațiu simetric interior compact ireductibil și $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o subalgebră Cartan comună. Fie $\rho : H \to \mathrm{Aut}(V_\mu)$ o reprezentare complexă a lui H de pondere maximală $\mu \in \mathfrak{t}^*$ și $V := G \times_\rho V_\mu$ fibratul complex peste M asociat lui ρ.

Teoremă

$$\mathrm{ind}(\mathcal{D}_V) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}(G)^+} \frac{\langle \mu + \rho^{\mathfrak{h}}, \alpha \rangle}{\langle \rho^{\mathfrak{g}}, \alpha \rangle} =: i(\mu).$$

unde $\mathcal{R}(G)^+$ este mulțimea rădăcinilor pozitive a lui G iar $\rho^{\mathfrak{h}}$ și $\rho^{\mathfrak{g}}$ sunt semi-sumele rădăcinilor pozitive ale lui H și G.
Demonstrație : Formula de dimensiune a lui Weyl.

Exemplu : $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$

$$\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^8 \subset \mathfrak{spin}(16) \subset \mathfrak{e}_8.$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{Spin}(16)) = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leq i < j \leq 8\}.$$

$$\mathcal{W}(\Sigma_{16}^+) = \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_8 = 1\}.$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{E}_8) = \mathcal{R}(\mathrm{Spin}(16)) \cup \mathcal{W}(\Sigma_{16}^+).$$

Exemplu : $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$

În raport cu camera Weyl fundamentala care conține vectorul $(23, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$,

$$\mathcal{R}^+(\mathrm{Spin}(16)) = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\}.$$

$$\mathcal{R}^+(\mathrm{E}_8) = \mathcal{R}^+(\mathrm{Spin}(16)) \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i e_i \mid \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_8 = 1 \right\}.$$

$$\rho^{\mathfrak{h}} = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0), \quad \rho^{\mathfrak{g}} = (23, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0).$$

Exemplu : $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$

Fie $M = \mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$; $\mathrm{T}M^{\mathbb{C}}$ este fibratul asociat reprezentării Σ_{16}^+ cu pondere maximală $\frac{1}{2}(1,1,1,1,1,1,1,1) \in \mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^8$. Fie E_k fibratul asociat reprezentării cu pondere maximală $(2k,0,0,0,0,0,0,0)$ a lui $\mathrm{Spin}^+(16)$.
$E_k \otimes \mathrm{T}M^{\mathbb{C}}$ este suma directa a doi fibrați asociați representărilor de ponderi maximale $\mu_1 := \frac{1}{2}(4k+1,1,1,1,1,1,1,1)$ și $\mu_2 := \frac{1}{2}(4k-1,1,1,1,1,1,1,-1)$. Pentru $k \leq 7$, $i(\mu_1) = i(\mu_2) = 0$. Pentru $k = 8$, $\mu_1 + \rho^{\mathfrak{h}}$ e ortogonal pe rădăcina $\alpha = \frac{1}{2}(1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1)$ deci $i(\mu_1) = 0$. Un calcul elementar arată că $i(\mu_2) = -1$. Deci $\mathrm{E}_8/\mathrm{Spin}^+(16)$ nu e stabil complex.

Partea a IV-a

Spații omogene stabil complexe

Clasificarea spațiilor omogene stabil complexe

Teoremă (M., Semmelmann)

Un spațiu omogen compact simplu conex $M = G/H$, cu $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H)$ e produs de spații din lista de mai jos :

1. G/H cu structură complexă G-invariantă (clasificate de Hermann 1955) ;
2. G/H cu fibrat tangent stabil trivial (clasificate de Singhof și Wemmer 1986) ;
3. unul din spațiile omogene :
   - $\mathrm{F}_4/(\mathrm{Spin}(4) \times T^2)$, $\mathrm{F}_4/(\mathrm{Spin}(4) \times \mathrm{U}(2))$
   - $\mathrm{SO}(2p + 2q + 1)/(\mathrm{SO}(2p) \times U)$
   - $\mathrm{Sp}(p + q)/(\mathrm{Sp}(1)^p \times U)$,

   unde U este un subgrup de rang q al lui $\mathrm{U}(q)$ pentru $q \geq 1$ iar $p \geq 2$.

Spațiile de la punctul (3) nu au nici fibrat tangent stabil trivial, nici structură complexă G-invariantă.

Ideea demonstrației

Lemă (Borel, Siebenthal)

H maximal în G și $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H) \implies (G, H)$ pereche simetrică sau listă explicită de 7 perechi : $(\mathrm{G}_2, \mathrm{SU}(3)), \dots, (\mathrm{E}_8, \mathrm{SU}(9))$.

Lemă (M., Semmelmann)

Fie $H_0 \subset H_1 \subset G$ grupuri Lie compacte.

- G/H_0 stabil complex $\implies H_1/H_0$ stabil complex.
- G/H_1 stabil complex și H_1/H_0 structură complexă invariantă $\implies G/H_0$ stabil complex.

Corolar (M., Semmelmann)

$\mathrm{E}_7/\mathrm{SU}(8)$ (de dim. 70 !) nu e stabil complex.

Ideea demonstrației

Lemă (reluare)

$H_0 \subset H_1 \subset G$

1. G/H_0 stabil complex $\implies$ H_1/H_0 stabil complex.
2. G/H_1 stabil complex și H_1/H_0 structură complexă invariantă $\implies$ G/H_0 stabil complex.

$$S(\mathrm{U}(4) \times \mathrm{U}(4)) \subset \mathrm{SU}(8) \subset \mathrm{E}_7$$

Dacă $\mathrm{E}_7/\mathrm{SU}(8)$ e stabil complex, punctul 2 din lemă $\implies$ $\mathrm{E}_7/S(\mathrm{U}(4) \times \mathrm{U}(4))$ stabil complex.Pe de altă parte

$$S(\mathrm{U}(4) \times \mathrm{U}(4)) \subset \mathrm{SO}(12) \times S^1 \subset \mathrm{E}_7$$

Punctul 1 din lemă $\implies$
$\mathrm{SO}(12) \times S^1/S(\mathrm{U}(4) \times \mathrm{U}(4)) = \mathrm{Gr}_6(\mathbb{R}^{12})$ stabil complex, contradicție.