La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes

Andrei Moroianu, Ecole Normale Supérieure

Résumé - K. D. Kirchberg [5] a donné une borne inférieure de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne spinorielle compacte M de dimension complexe impaire, à courbure scalaire positive. On montre que les variétés pour lesquelles l'égalité est atteinte s'identifient aux espaces de twisteurs (cf. [12]) des variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.

The first eigenvalue of the Dirac operator on compact Kähler manifolds

Abstract - K. D. Kirchberg [5] gave a lower bound for the first eigenvalue of the Dirac operator on a spin compact Kähler manifold M of odd complex dimension with positive scalar curvature. We prove that manifolds satisfying the limiting case are twistor space (cf. [12]) of quaternionic Kähler manifold with positive scalar curvature.

In 1986, K.D. Kirchberg showed that any eigenvalue λ of the Dirac operator on a compact spin Kähler manifold (M^{2m}, g) of odd complex dimension satisfies

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m} \inf_M S. \tag{1}$$

A *limiting manifold* a compact spin Kähler manifold (M^{2m}, g, J) of odd complex dimension which satisfies the limiting case of (1). The aim of this paper is to prove the following

Theorem. The only limiting manifold of real dimension $8l+2$ is $\mathbf{C}P^{4l+1}$. The limiting manifolds of real dimension $8l+6$ are exactly the twistor spaces associated to quaternionic Kähler manifolds of positive scalar curvature.

For the notations we take [5] and [10] as basic references. We start with a simple lemma

Lemma. Let (M^{2m}, g, J) be a limiting manifold. Then M is simply connected and it exists a simply connected spin Riemannian manifold UM^{2m+1} and a Riemannian submersion $\pi : UM \to M$ whose fundamental tensors T and A (cf. [10]) satisfy

$$T = 0$$

et

$$A_{X^*}V = J(X)^*,$$

where $*$ means the horizontal lift of vectors on M to UM. Moreover, the spin structure of UM is the pull-back by π of the spin structure on M.

We now introduce the basic notion of a projectable spinor. By the lemma, a spinor on M induces a spinor on UM. All spinors on UM obtained in this manner are called projectable. There is a one-to-one correspondence between spinors on M and projectable spinors on UM.

Let $\tilde{\Phi}$ be a spinor on UM, projectable on Φ. Then a simple calculation shows that $\tilde{\nabla}_{X^*}\tilde{\Phi}$ is projectable on

$$\nabla_X \Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*}V) \cdot \bar{\Phi},$$

and $\tilde{\nabla}_V \tilde{\Phi}$ is projectable on

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot X_j \cdot \Phi.$$

The connections appearing here are obviously induced by the Levi-Civita connections on the respective manifolds. Now, the theorem A of [4] implies that, after rescaling the metric, M admits a spinor Ψ satisfying

$$\nabla_X \Psi + \frac{\varepsilon}{2} X \cdot \Psi - \frac{i}{2} J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0, \tag{2}$$

where $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$. This formula and the previous paragraph show that the projectable spinor induced by Ψ on UM is a Killing spinor. Finally, a case-by-case analysis of the Bär classification [1] of simply connected manifolds admitting Killing spinors, shows that UM admits a regular Sasakian 3-structure, and the work of Boyer, Galicki and Mann [2] completes the proof of the theorem.

1. En 1986, K. D. Kirchberg [5] a montré que toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne spinorielle compacte (M^{2m}, g) de dimension complexe impaire satisfait

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4m} \inf_M S. \tag{3}$$

Pour simplifier, on appellera *variété-limite* une variété kählérienne spinorielle compacte (M^{2m}, g, J) de dimension complexe impaire, pour laquelle l'égalité dans (3) est satisfaite.

En 1988, Kirchberg [6] classifie toutes les variétés-limites de dimension 6, et il trouve l'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^3$ et la variété de drapeaux $F_3(2,1)$. En [4], Hijazi redémontre l'inégalité (3) d'une manière plus simple et donne une reformulation du problème qui sera très utile dans ce qui suit. Dans le cas de la dimension complexe paire il existe une inégalité similaire à (3), dont le cas d'égalité a été analisé par Lichnerowicz [8], qui a montré que le problème se réduit au cas de la dimension complexe impaire.

Le but de ce papier est de montrer que la seule variété-limite de dimension $8\,l+2$ est $\mathbf{C}\mathrm{P}^{4l+1}$ et que toute variété-limite de dimension $8\,l+6$ est l'espace de twisteurs en sens généralisé [12] associé à une variété quaternionienne à courbure scalaire positive. L'idée de la démonstration est de montrer que l'égalité dans (3) implique l'existence de spineurs de Killing sur un certain fibré en cercles UM au-dessus de M, d'utiliser la classification due à C. Bär des variétés admettant des spineurs de Killing réels [1] pour montrer que UM admet une 3-structure de Sasaki régulière, et de remarquer que M est l'espace de twisteurs associé au quotient de UM par les orbites de la 3-structure de Sasaki, en utilisant les resultats de Boyer, Galicki et Mann [2]. Pour les notations, on choisit comme références [5] et [10].

Je tiens à remercier spécialement mon directeur de thèse Jean Pierre Bourguignon pour son soutien, ses encouragements, et pour les nombreuses idées partagées au cours de nos discussions.

2. On commence par montrer que pour toute variété-limite (M^{2m}, g, J), il existe une variété riemannienne spinorielle UM de dimension $2m+1$ et une submersion riemannienne $\pi : UM \to M$ dont les tenseurs fondamentaux A et T (cf. [10]) satisfont

$$T = 0 \quad \text{et} \quad A_{X^*}V = J(X)^*,$$

ou $*$ représente le relèvement horizontale de M à UM.

Toute variété-limite est une variété d'Einstein-Kähler, donc la classe de cohomologie de la forme de Kähler de M est égale à la première classe de Chern, $c_1(M)$. Soit r le plus grand entier positif tel que $c_1(M)/r$ soit encore une classe entière. Considérons le fibré en droites complexes PM sur M, dont la première classe de Chern, $c_1(PM \to M)$, est égale à $c_1(M)/r$. On choisit une métrique hermitienne arbitraire h sur PM et on considère UM, le fibré principal associé, de groupe structural $U(1) = S^1$. On considère une connexion sur UM de forme de connexion α, qui induit une connexion métrique sur PM. Soit F la forme de courbure de α sur UM. La connexion sur UM induit une famille de métriques riemanniennes sur UM qui font de π une submersion riemannienne : il suffit de définir $g^c_{UM}(X,Y) = g_M(\pi(X), \pi(Y)) - c\,\alpha(X)\,\alpha(Y) \quad (c>0)$, via l'identification de $\mathcal{L}(\mathcal{S}^\infty)$ avec $i\,\mathbf{R}$ qui fait correspondre $\frac{\partial}{\partial t}$ à i. La submersion riemannienne ainsi obtenue est à fibres totalement géodésiques. Un calcul simple montre que pour $c = 1/(2\,\pi\,r)$ et pour un choix judicieux de la connexion sur UM, on a

$$A_{X^*}V = J(X)^*. \tag{4}$$

On conclut avec la remarque que pour toute submersion riemannienne $p : E \to M$ de fibres de dimension 1 et pour toute structure spinorielle sur M, il existe une structure spinorielle naturelle sur E et une projection canonique sur la structure spinorielle sur M .

Pour $E = UM$, on appelle $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur UM, ainsi que la connexion induite sur le fibré des spineurs sur UM.

3. Les résultats de cette section sont valables pour toute submersion riemannienne $E \to M$ à fibres totalement géodésiques de dimension 1 sur une variété M de dimension paire. Soit, pour $n = 2\,m$, Σ_n - la représentation irréductible de $\mathbf{Cl}_n$. Par rapport à l'action de $\mathrm{Spin}(n)$, Σ_n se décompose en $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$. Si par rapport à cette décomposition, ψ s'écrit $\psi = \psi_+ + \psi_-$, on note $\bar{\psi} = \psi_+ - \psi_-$.

L'algèbre $\mathbf{Cl}_{n+1}$ a deux représentations irréductibles, $\Sigma_{n+1}^{\pm}$, dont la somme directe est la représentation spinorielle Σ_{n+1}. Les sous-espaces $\Sigma_{n+1}^{\pm}$ de Σ_{n+1} sont les sous-espaces propres de la multiplication par $\omega = i^m\, e_1 \cdots e_{n+1}$ avec la valeur propre $\pm\, i$. On identifie $\Sigma_{n+1}^{\pm}$ avec Σ_n par les actions $\rho^{\pm}$ de $\mathbf{Cl}_{n+1}$ sur Σ_n suivantes

$$\rho^{\pm}(e_k) \cdot \psi = \begin{cases} e_k \cdot \psi & \text{si } k \le n \\ \pm\, i \cdot \bar{\psi} & \text{si } k = n+1 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on identifie Σ_{n+1}^{+} avec Σ_n par l'intermédiaire de ρ^+. La fin de la section précédente montre qu'on peut définir une application de fibrés vectoriels $h : \Sigma^+ E \to \Sigma M$. Evidemment, $\Sigma^+ E = \pi^*(\Sigma M)$.

Définition. On appelle spineur projetable tout champ spinoriel Ψ sur E qui satisfait $h(\Psi_e) = h(\Psi_f)$ pour tous e et f tels que $\pi(e) = \pi(f)$.

Tout spineur projetable Φ sur E induit d'une manière évidente un spineur $h(\Phi)$ sur M. Réciproquement, tout spineur Ψ sur M induit un unique spineur projetable $\tilde{\Psi}$ sur E par la formule $\tilde{\Psi} = f^*\Psi$. Dans un certain sens, les spineurs projetables sont les spineurs sur E "constants" le long des fibres de la fibration $E \to M$.

Si $\tilde{\Phi}$ est projetable sur Φ, alors $X^* \cdot \tilde{\Phi}$ est projetable sur $X \cdot \Phi$ et $V \cdot \tilde{\Phi}$ est projetable sur $i\,\bar{\Phi}$.

Proposition 1. Soit $\tilde{\Phi}$ un spineur sur E, projetable sur Φ. Alors $\tilde{\nabla}_{X^*}\tilde{\Phi}$ est projetable sur $\nabla_X \Phi - \frac{1}{2}\, i\, \pi_*(A_{X^*}V) \cdot \bar{\Phi}$, et $\tilde{\nabla}_V \tilde{\Phi}$ est projetable sur $-\frac{1}{4}\, \sum_{j=1}^n \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot X_j \cdot \Phi$.

Corollaire. Si D^E et D sont les opérateurs de Dirac sur E et M respectivement, alors pour tout spineur $\tilde{\Phi}$ projetable sur Φ, $D^E\tilde{\Phi}$ est projetable sur $D\Phi - \frac{1}{4}\, i\, \sum_{j=1}^n X_j \pi_*(A_{X_j^*}V) \cdot \bar{\Phi}$. En particulier, pour $E = UM$ on a

$$h(D^{UM}\tilde{\Phi}) = D\Phi + \frac{1}{2}\, i\, \Omega \cdot \bar{\Phi}, \tag{5}$$

où Ω est la forme de Kähler de M.

4. Dans cette section E sera une variété riemannienne spinorielle de dimension impaire $2\,m+1$ avec la connexion de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$. Les résultats qu'on obtient seront utilisés dans la section suivante dans le cas où E est le fibré UM sur M construit ci-dessus.

Soit CE le cône sur E, c.à.d. $CE = E \times \mathbf{R}_+^*$ avec la métrique $\bar{g} = r^2 g_E + dr^2$ qui induit la connexion de Levi-Civita $\bar{\nabla}$. On identifie tout champ de vecteurs X sur E avec son prolongement canonique à CE.

On identifie $\Sigma_{2\,m+2}$ avec $\Sigma_{2\,m+1}$ par l'isomorphisme de $\mathbf{Cl}^+_{2\,m+2}$ sur $\mathbf{Cl}_{2\,m+1}$ donné par $e_i \cdot e_{2\,m+2} \mapsto e_i$. On applique, mutatis mutandis, les mêmes raisonnements des deux sections précédentes, et on trouve, en utilisant les formules des produits tordus ([11], p.206),

Proposition 2. Soit $\tilde{\Phi}$ un spineur sur CE, projetable sur Φ. Alors $\bar{\nabla}_X \tilde{\Phi}$ est projetable sur $\tilde{\nabla}_X \Phi - \frac{1}{2} X \cdot \Phi$, et $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{\Phi} = 0$.

Donc si E admet un spineur de Killing de constante $-\frac{1}{2}$, CE admet un spineur parallèle. Ceci est une manière plus simple de classifier les variétés simplement connexes admettant des spineurs de Killing, sans passer par les formes de connexion et les groupes d'holonomie, comme dans le papier initial de Bär [1].

5. Soit maintenant M une variété-limite de dimension $n = 2\,m$, m impair, et $UM \to M$ la submersion riemannienne construite dans les sections précédentes. Soit Ψ un spineur qui satisfait $D\Psi = \lambda\,\Psi$, avec $\lambda = \frac{n+2}{4\,n} \inf_M S$. Du théorème A de [4] on tire que S est constant et que

$$\nabla_X \Psi + \frac{\lambda}{n+2}\, X \cdot \Psi - \frac{i\,\varepsilon\,\lambda}{n+2}\, J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0, \tag{6}$$

où $\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$. En renormalisant la métrique sur M de telle manière que $S = n\,(n+2)$, et supposant $\lambda = \frac{\varepsilon\,(n+2)}{2}$, (6) donne

$$\nabla_X \Psi + \frac{\varepsilon}{2}\, X \cdot \Psi - \frac{i}{2}\, J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0. \tag{7}$$

Soit $\tilde{\Psi}$ le spineur projetable induit par Ψ sur UM. La proposition 1 et (7) montrent, après un calcul simple, que $\tilde{\nabla}_{X^*} \tilde{\Psi} + \frac{\varepsilon}{2} X^* \cdot \tilde{\Psi}$ et $\tilde{\nabla}_V \tilde{\Psi} + \frac{\varepsilon}{2} V \cdot \tilde{\Psi}$ sont projetables sur 0, donc $\tilde{\Psi}$ est un spineur de Killing de $\Sigma^+ UM$ de constante $-\frac{\varepsilon}{2}$.

Comme M est une variété d'Einstein-Kähler de constante d'Einstein positive, le théorème de Kobayashi [7] montre que M est simplement connexe. En considérant la suite exacte d'homotopie et la suite exacte de Thom-Gysin du fibré (UM, π, M, S^1), et utilisant le choix de la classe de Chern du fibré PM fait dans la section 2, on obtient que UM est lui aussi simplement connexe (cf. [9]). La classification de Bär montre alors que le groupe d'holonomie du cône CM sur UM est un des groupes de la liste suivante $(n+2 = 4\,k)$

$$0\,,\quad \mathrm{SU}(2\,k)\,,\quad \mathrm{Sp}(k)\,,\quad \mathrm{Spin}(7).$$

Le cas $\mathrm{Hol}(CM)=\mathrm{Spin}(7)$ est impossible car V définit une structure de Sasaki sur UM, donc (cf. [1], pp.14) CM est kählérienne et Ricci-plate ce qui montre que le groupe d'holonomie de CM est inclus dans $\mathrm{SU}(4)\subset\mathrm{Spin}(7)$ (strictement).

On montre à présent que le cas $\mathrm{Hol}(CM)=\mathrm{SU}(2\,k)$ est, lui aussi, impossible. Soit Φ le relévement de $\tilde{\Psi}$ dans CM. Le spineur $\tilde{\Psi}$ est projetable, et un calcul simple (utilisant la proposition 2), montre que Φ est un spineur parallèle qui se trouve dans le noyau de la forme de Kähler sur CM. En regardant les points fixes de la représentation spinorielle de $\mathbf{su}(2\,k)$ on trouve seulement deux spineurs parallèles, dans $\Sigma_0 CM$ et $\Sigma_{2\,k}CM$, ce qui contredit le fait que Φ est dans $\Sigma_k CM$.

Les seuls cas qui restent sont par conséquent $\mathrm{Hol}(CM)=\mathrm{Sp}(k)$ et $\mathrm{Hol}(CM)=0$. Dans chacun de ces deux cas, UM admet une 3-structure de Sasaki. Pour montrer sa régularité, il suffit de remarquer que, si (V,X,Y) définit la 3-structure de Sasaki sur UM, alors la projection de X et Y sur M est une distribution intégrable et régulière de dimension 2 sur M, dont les orbites sont des sphères S^2 (cf. [3]). De [2] on obtient que M est l'espace de twisteurs associé au quotient de UM par la 3-structure de Sasaki, qui est une variété quaternionienne. Finalement, un raisonnement de nature algébrique, montre que dans le cas $n=8\,l+2$, il n'y a pas de spineur parallèle dans $\Sigma_k CM$, sauf si $CM=\mathbf{R}^{n+2}$, ce qui implique $M=\mathbf{C}P^{4\,l+1}$.

Réciproquement, pour $n=8\,l+6$, toute variété quaternionienne N^{n-2} induit une variété P^{n+1} qui admet une 3-structure de Sasaki régulière [2]. Alors le quotient M de P par l'orbite d'un des 3 vecteurs de Killing est une variété spinorielle compacte d'Einstein-Kähler de courbure scalaire constante $S=n\,(n+2)$, et $UM=P$. Le cône sur P, CP, est hyperkählérien, donc il existe un spineur parallèle $\hat{\Psi}$ dans $\Sigma_k CP$, projetable sur un spineur $\tilde{\Psi}$ sur P, qui par le paragraphe ci-dessus est à son tour projetable sur un spineur Ψ sur M qui satisfait (7). Un calcul simple montre que Ψ est un spineur propre avec $\lambda=\frac{\varepsilon\,(n+2)}{2}$, donc $\lambda^2=\frac{n+2}{n}\,S$, i.e. M est une variété-limite. On vient de montrer le résultat suivant :

Théorème. La seule variété-limite de dimension $8\,l+2$ *est* $\mathbf{C}P^{4\,l+1}$. *Les variétés-limites de dimension* $8\,l+6$ *sont exactement les espaces de twisteurs au sens de [12] associés aux variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive.*

Q.E.D.

6. *Exemples.* Les seules exemples connus de variétés quaternioniennes à courbure scalaire positive sont des espaces symétriques. On a trois familles

$$\mathbf{H}P^k=\frac{Sp(k+1)}{Sp(k)\times Sp(1)},\quad X^k=\frac{SU(k+2)}{S(U(k)\times U(2))},\quad Y^k=\frac{SO(k+4)}{S(O(k)\times O(4))},$$

et 5 exemples correspondant aux groupes exceptionnels. La première famille a comme famille de variétés-limites $M^{4k+2} = \mathbf{C}P^{2k+1}$. La famille X^k induit comme variétés-limites la famille de variétés des drapeaux (k impair)

$$F_{k+2}(2,1) = \{(V_1, V_2) |\ 0 \in V_1 \subset V_2 \subset \mathbf{C}^{k+2}, dim_{\mathbf{C}} V_i = i\}.$$

La famille Y^k induit comme variétés-limites les espaces homogènes (k impair)

$$Z^{4k+2} = \frac{SO(k+4)}{S(O(k) \times O(3) \times O(2))}.$$

Pour des détails, on propose [12].

Références

[1] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy,* Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509-521.

[2] C.P.BOYER, K.GALICKI, B.M. MANN, *Quaternionic Reduction and Einstein Manifolds,* Commun. Anal. Geom. **2** (1993), 229-279.

[3] R. HERMANN, *On the Differential Geometry of foliations,* Ann. Math. **72** (1960), 445-457.

[4] O. HIJAZI, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds,* Commun. Math. Phys. **160** (1994), 563-579.

[5] K.-D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.

[6] K.-D. KIRCHBERG, *Compact six-dimensional Kähler spin manifolds of positive scalar curvature with the smallest possible first eigenvalue of the Dirac operator,* Math. Ann. **282** (1988), 157-176.

[7] S. KOBAYASHI, *On compact Kähler manifolds with positive definite Ricci tensor,* Ann. of Math. **74** (1961), 570-574.

[8] A. LICHNEROWICZ, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour une variété kählérienne et son cas limite,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. **311**, Série **I** (1990), 717-722.

[9] J.W. MILNOR, J.D. STASHEFF, *Characteristic classes,* Annals of Mathematical Studies **76**, Princeton, 1974.

[10] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion,* Mich. Math J. **13** (1966) 459-469.

[11] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian geometry,* Acad. Press, New York, 1983.

[12] S. SALAMON, *Quaternionic Kähler Manifolds,* Inventiones Math. **67** (1982), 143-171.