25ème Section – Mathématiques

Synthèse des travaux

Andrei MOROIANU

Octobre 2002

Table des matières

1 L'opérateur de Dirac et la géométrie spinorielle 9

1.1 Cas–limites pour les valeurs propres 9

1.1.1 Quelques résultats classiques 9

1.1.2 Variétés kählériennes limites 12

1.1.3 Variétés admettant des spineurs de Killing 14

1.1.4 Spineurs parallèles 16

1.2 Structures Spin^c et applications 18

2 Structures géométriques spéciales 23

2.1 En géométrie presque hermitienne 23

2.1.1 Variétés approximativement kählériennes 23

2.1.2 Le tenseur de Ricci sur les variétés kählériennes 24

2.1.3 Formes–twisteurs sur les variétés kählériennes 24

2.2 En géométrie métrique de contact 25

Présentation générale

Mes travaux portent essentiellement sur la géométrie riemannienne et spinorielle et ils peuvent être regroupés suivant deux axes de recherche, dont chacun peut à son tour se subdiviser ainsi:

- Géométrie spinorielle
  - Propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac
  - Structures Spin^c et applications
- Structures géométriques spéciales sur les variétés riemanniennes
  - Eléments de géométrie presque hermitienne
  - Variétés métriques de contact.

Bien évidemment, ce regroupement est seulement approximatif, la plupart de mes travaux ayant trait à la fois à plusieurs des sujets ci–dessus. Par ailleurs, cette liste de sujets, qui à première vue peut paraître hétéroclite, s'est en fait développée naturellement au cours des années, au fur et à mesure de l'avancement de mes travaux. Ainsi, à partir de considérations sur les variétés spinorielles, j'ai été amené à étudier les structures Spin^c, qui se sont avérées très utiles pour la résolution d'une conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites pour l'inégalité de Kirchberg ([[12]]), ou pour la classification des variétés de Kähler–Einstein de contact, que j'ai obtenue dans [[9]]. Parallèlement, l'étude des variétés admettant des spineurs de Killing m'a amené naturellement vers la géométrie presque hermitienne et de contact, cf. [[16]], [[17]], [[6]], [[13]].

Voici maintenant un passage en revue bref mais exhaustif de mes travaux. Ils seront présentés plus en détail dans les sections suivantes.

Mon sujet de thèse a été l'étude des submersions riemanniennes du point de vue de la géométrie spinorielle.

Ce problème est difficile en toute généralité, car on ne peut pas relier naturellement entre eux les fibrés des spineurs de la base et de l'espace total, comme on peut le faire, par exemple, avec les fibrés tangents, pour lesquels on sait que si $\pi : N \to M$ est une submersion riemannienne, alors TM est canoniquement isomorphe à la restriction à M d'un sous–fibré de TN. La solution la plus naturelle est de se restreindre au cas où la submersion riemannienne est une fibration principale. Dans ce cas j'ai introduit la notion de *spineur projetable*, qui s'est avéré être un instrument très utile dans l'étude des structures géométriques spéciales qui apparaissent dans les cas–limites des inégalités classiques sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac, ainsi qu'en géométrie twistorielle et de contact. Ainsi, dans [[1]], je traite le cas–limite dans l'inégalité de Kirchberg sur les variétés kählériennes compactes de dimension complexe impaire à l'aide des spineurs projetables. D'autres applications des spineurs projetables se trouvent dans les articles [[3]], [[10]], [[5]], qui font tous partie de ma thèse.

Toujours dans le cadre de ma thèse, j'ai classifié les structures de Weyl admettant des spineurs parallèles [[2]], j'ai montré que l'existence des spineurs de Killing kählériens sur une variété spinorielle implique des contraintes fortes sur les formes harmoniques de cette variété [[4]], j'ai classifié – en collaboration avec Thomas Friedrich, Ines Kath et Uwe Semmelmann – les structures G_2 presque parallèles homogènes et j'ai construit de nouveaux exemples non–homogènes [[6]]. Enfin, l'article [[8]] représente la première étape vers la résolution de la conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites pour l'inégalité de Kirchberg en dimension complexe paire, dont j'ai obtenu la solution complète seulement après ma thèse, dans [[12]].

Ensuite, pendant mon séjour post–doctoral à Berlin (1996–1997), je me suis tourné vers la géométrie Spin^c. Dans un premier temps j'ai étudié le problème de la classification des variétés Spin^c admettant des spineurs parallèles et de Killing. La motivation initiale de ce travail, qui a fait l'objet de l'article [[7]], a été une étude de Stephan Maier sur la dimension de l'espace des spineurs harmoniques pour une métrique générique, dans laquelle l'auteur a besoin justement de cette classification. Ensuite, à l'aide de la géométrie Spin^c, j'ai complété la preuve d'un théorème de Claude LeBrun sur les variétés Kähler–Einstein de contact pour les dimension qui manquaient dans [[5]]. Puis, dans [[13]], j'ai étudié la représentation du groupe d'isométries sur les spineurs de Killing pour les variétés d'Einstein–Sasaki et 3–sasakiennes et j'ai donné des applications géométriques de ces résultats.

Dans un travail avec Marc Herzlich [[11]], nous nous sommes intéressés à la généralisation au cadre Spin^c de l'inégalité d'Hijazi (cf. [30]). L'étude du cas–limite de l'inégalité que nous obtenons mène à la notion de *spineur de Killing généralisé*. Mes travaux en géométrie Spin^c ont culminé avec l'article [[12]] où j'obtiens la preuve complète de la conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites en dimension complexe paire à l'aide des résultats de [[8]] et [[7]].

En collaboration avec Semmelmann, j'ai classifié dans [[14]] les variétés non simplement connexes admettant des spineurs parallèles, et dans [[18]] les variétés kählériennes admettant des formes–twisteurs. Avec Florin Belgun j'ai montré que les variétés approximativement kählériennes à holonomie hermitienne réduite sont des espaces de twisteurs [[16]] (ce qui avait été conjecturé par Ramon Reyes–Carrión), et avec Belgun et Semmelmann nous nous sommes intéressés au groupe d'isométries des variétés de contact [[17]]. Enfin, j'ai étudié avec Vestislav Apostolov et Tedi Draghici, les variétés kählériennes compactes dont le tenseur de Ricci a exactement deux valeurs propres constantes et montré que ce tenseur est parallèle dans le cas où les deux valeurs propres sont non–négatives [[15]].

Chapitre 1

L'opérateur de Dirac et la géométrie spinorielle

1.1 Cas–limites pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac

1.1.1 Quelques résultats classiques

L'opérateur de Dirac est défini comme la composition de la dérivée covariante de la connexion de Levi-Civita sur le fibré des spineurs et la multiplication de Clifford. Il a été introduit par P.A.M. Dirac à l'aide des matrices de Pauli sur l'espace de Minkowski, et sous sa forme actuelle par M. Atiyah and I.M. Singer dans [20]. C'est un opérateur elliptique auto-adjoint d'ordre un qui agit sur les sections des fibrés de Clifford (en particulier du fibré spinoriel si la variété est spin) et dont le symbole principal engendre celui de tout opérateur elliptique. Il faut mentionner que les seuls opérateurs différentiels universels du premier ordre sur les champs de spineurs sont l'opérateur de Dirac et l'opérateur des twisteurs, ce qui leur donne un rôle analogue à la différentielle extérieure dans la théorie des formes différentielles extérieures. Sans trop insister sur l'importance bien connue de l'opérateur de Dirac, on peut néanmoins rappeler le fait qu'il joue un rôle fondamental dans les théorèmes de l'indice d'Atiyah–Singer [20], la classification des variétés à courbure scalaire positive [29], en géométrie non–commutative, ou encore dans la récente théorie de Seiberg–Witten, où il intervient de manière incontournable.

Pourtant, l'opérateur de Dirac et plus généralement la géométrie spinorielle restent, aujourd'hui encore, assez mal compris par les mathématiciens, et les spineurs sont loin d'avoir dévoilé toute les facettes qu'on peut leur soupçonner. Une des raisons les plus importantes de cette incompréhension est peut-être de nature algébrique: toutes les représentations de dimension finie du revêtement universel du groupe général linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ déscendent à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ lui-même; pour introduire les spineurs il serait donc nécessaire de considérer des représentations de dimension infinie, un fait qui avait été remarqué par E. Cartan dans son livre publié en 1937: *"en ayant choisi un système de coordonnées arbitraire pour l'espace, il est impossible de représenter un spineur par un nombre quelconque N de composantes...*" ([25]). Généralement on contourne cette difficulté en introduisant une métrique et une orientation sur l'espace vectoriel (ou le fibré tangent) considéré, mais le prix à payer est la dépendance des spineurs de la métrique considérée. Dans [23], Jean Pierre Bourguignon et Paul Gauduchon ont développé une théorie qui permet de "comparer" des spineurs associés à des métriques différentes.

On s'intéresse ici aux propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac sur les variétés spinorielles *compactes*. La théorie générale des opérateurs elliptiques nous assure que son spectre est discret et les multiplicités des valeurs propres sont finies. Dans le cas où la courbure scalaire S de la variété considérée est positive, on peut obtenir des minorations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac (ou plus précisément de leur carré) en utilisant la formule de Lichnerowicz $D^2 = \Delta + \frac{1}{4}S$, où Δ représente le laplacien spinoriel [37]. Par intégration sur la variété on trouve directemment l'inégalité

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4}\inf_M S \ , \tag{1.1}$$

pour toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac sur M. Cependant, cette inégalité n'est pas optimale, car l'égalité dans (1.1) ne peut jamais avoir lieu si S n'est pas identiquement nulle.

La première inégalité optimale sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac a été obtenue par Friedrich [27], en utilisant l'opérateur des twisteurs introduit par Roger Penrose. Le cas–limite dans l'inégalité de Friedrich est caractérisé par l'existence de *spineurs de Killing*, c–à–d de spineurs Ψ satisfaisant

$$\nabla_X \Psi = \alpha X \cdot \Psi, \quad \forall X \in TM,$$

pour une constante non–nulle $\alpha \in \mathbb{R}$. Leur nom vient du fait qu'un certain champ de vecteurs naturellement associé à tout spineur est un champ de vecteurs de Killing, c–à–d une isométrie infinitésimale, si le spineur en question est un spineur de Killing.

La description géométrique des variétés admettant des spineurs de Killing a été obtenue par Christian Bär en 1993 [22]. Ses résultats peuvent être énoncés de la manière suivante:

Théorème 1.1.1 [22] – *Toute variété simplement connexe admettant des spineurs de Killing* *appartient à une des cinq familles ci–dessous:*

A. *les sphères, en toutes dimensions;*
B. *les variétés d'Einstein–Sasaki, en dimensions impaires;*
C. *les variétés 3–sasakiennes, en dimensions de la forme $4k+3$;*
D. *les variétés admettant une G_2–structure presque parallèle, en dimension 7;*
E. *les variétés approximativement kählériennes, en dimension 6.*

On remarque que dans cette liste il n'y a aucune variété kählérienne, et celà, en effet, n'est pas un hasard puisque, déjà en 1984, Oussama Hijazi avait montré que les variétés kählériennes ne possèdent pas de spineurs de Killing [30].

Ceci montre en particulier que l'inégalité de Friedrich n'est pas optimale pour les variétés kählériennes; ce fut Klaus–Dieter Kirchberg qui, en 1986, trouva des inégalités optimales satisfaites par les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur une variété kählérienne compacte à courbure scalaire positive (M^{2m},g,J) en faisant intervenir la forme de Kähler de la variété [33]. Les inégalités de Kirchberg peuvent s'écrire

$$\lambda^2 \geq \frac{m+1}{4\,m} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est impair}, \tag{1.2}$$

et

$$\lambda^2 \geq \frac{m}{4\,(m-1)} \inf_M S, \quad \text{si } m \text{ est pair}, \tag{1.3}$$

pour toute valeur propres λ de l'opérateur de Dirac sur M. Les cas–limites dans ces inégalités se caractérisent par l'existence de *spineurs de Killing kählériens*, c–à–d satisfaisant l'équation

$$\nabla_X \Psi + \alpha X \cdot \Psi - i\varepsilon\alpha J(X) \cdot \bar{\Psi} = 0, \quad \forall X \in TM \quad (\varepsilon = (-1)^{\frac{m-1}{2}}), \tag{1.4}$$

en dimension complexe impaire ([31]), et par l'existence de spineurs Ψ satisfaisant

$$\nabla_X \Psi = -\frac{1}{n}(X - iJX) \cdot D\Psi \tag{1.5}$$

et

$$\nabla_X D\Psi = -\frac{1}{4}(\mathrm{Ric}(X) + iJ\mathrm{Ric}(X)) \cdot \Psi \tag{1.6}$$

en dimension complexe paire. Les variétés pour lesquelles l'égalité est atteinte dans (1.2) ou (1.3) seront appelées des *variétés kählériennes limites.*

Dans les sections suivantes je présenterai mes résultats sur les spineurs projetables et les variétés kählériennes limites (contenus dans les articles [[1]], [[4]], [[5]], [[8]], [[9]], [[10]], [[12]]), ainsi que les principales applications de ces résultats. J'exposerai ensuite mes travaux sur les variétés spin, Spin^c ou conformes admettant des spineurs parallèles ou des spineurs de Killing ([[2]], [[3]], [[6]], [[7]], [[11]], [[13]], [[14]]).

1.1.2 Variétés kählériennes limites

La classification des variétés admettant des spineurs de Killing kählériens (autrement dit, des *variétés kählériennes limites* de dimension complexe impaire) est fondée sur la notion de *spineur projetable*, que j'ai introduite dans [[1]]. Le résultat est le suivant

Théorème 1.1.2 [[1]] – *La seule variété kählérienne limite de dimension* $8l+2$ *est* $\mathbb{C}\mathrm{P}^{4l+1}$. *Les variétés kählériennes limites de dimension* $8l+6$ *sont précisément les espaces de twisteurs (au sens de Salamon) des variétés quaternion–kählériennes à courbure scalaire positive.*

L'idée de la démonstration est de considérer le S^1–fibré UM associé à une racine maximale du fibré canonique de M, avec la métrique induite par la connexion du fibré canonique. La variété UM admet alors une structure spin naturelle, et on peut montrer que tout spineur de Killing kählérien sur M induit un spineur de Killing ordinaire *projetable* sur UM. En utilisant la classification de Bär, ceci permet de montrer que UM est une variété 3–sasakienne, et de conclure après quelques considérations algébriques.

Les variétés admettant des spineurs de Killing ou des spineurs de Killing kählériens s'intègrent donc naturellement dans le cadre de la géométrie twistorielle, développée par Simon Salamon et Lionel Bérard Bergery [41].

Une des applications les plus inattendues du théorème 1.1.2 a été la classification des variétés de Kähler–Einstein à courbure scalaire positive admettant une structure complexe de contact. Une telle variété est nécessairement de dimension complexe impaire mais elle n'est spinorielle, en général, qu'en dimension complexe $4l+3$. La classification a donc été obtenue en deux étapes.

En premier lieu, dans un travail avec Semmelmann, utilisant ses résultats antérieurs sur les structures complexes de contact et le théorème 1.1.2, on obtient le

Théorème 1.1.3 [[5]] – *Si* M *est une variété de Kähler–Einstein de dimension complexe* $4l+3$ *admettant une structure complexe de contact, alors* M *est l'espace de twisteurs associé à une variété quaternionique–kählérienne à courbure scalaire positive.*

La démonstration consiste en la construction directe d'une structure spinorielle et d'un spineur de Killing kählérien sur toute variété de Kähler–Einstein de dimension complexe $4l+3$ admettant une structure complexe de contact, suivie de l'application du théorème 1.1.2.

La deuxième étape de la classification consiste à analyser le cas de la dimension complexe $4l+1$. Dans ces dimensions, les espaces qui interviennent n'étant plus spinoriels, il faut faire appel aux structures Spin^c. Les détails seront présentés dans la section 2.2 (cf théorème 1.2.1).

Comme corollaire immédiat des théorèmes 1.1.3 et 1.2.1 on a le résultat suivant, obtenu indépendamment par LeBrun [36].

Théorème 1.1.4 [[9]] – *Une variété de Kähler–Einstein positive admet une structure complexe de contact si et seulement si elle est l'espace de twisteurs d'une variété quaternion–kählérienne à courbure scalaire positive.*

J'ai continué dans [[4]] l'étude des variétés kählériennes admettant des spineurs de Killing kählériens, cette fois du point de vue des formes harmoniques, en obtenant les deux théorèmes d'annulation suivants:

Théorème 1.1.5 [[4]] – *Si ω est une forme harmonique effective non–constante sur une variété kählérienne limite et Ψ un spineur de Killing kählérien, alors $\omega \cdot \Psi = 0$.*

Théorème 1.1.6 [[4]] – *En dehors des multiples constants des puissances extérieures de la forme de Kähler, il n'y a pas de forme parallèle de type (p,p) sur une variété M^{8l+6} de Kähler–Einstein admettant une structure complexe de contact.*

Tournons–nous à présent vers l'étude du cas–limite dans l'inégalité de Kirchberg pour les variétés kählériennes de dimension complexe paire. La différence fondamentale par rapport au cas précédent est l'absence de spineurs de Killing kählériens, qui rend impossible l'utilisation des spineurs projetables.

Il est facile de voir que le produit riemannien d'un tore plat de dimension 2 et une variété admettant des spineurs de Killing kählériens est une variété kählérienne limite de dimension complexe paire. En 1990 André Lichnerowicz a conjecturé que toutes les variétés kählériennes limites M^{4k} peuvent être obtenues de cette manière, et donne une démonstration à cette conjecture, qui n'est valable, cependant, que dans le cas où le tenseur de Ricci est parallèle [38]. A la même époque, Friedrich prouve la conjecture en dimension complexe 2 (cf. [28]).

L'article [[8]] constitue le premier pas vers la preuve de la conjecture de Lichnerowicz. Plus précisément, j'y démontre le résultat suivant:

Théorème 1.1.7 [[8]] – *Le tenseur de Ricci d'une variété kählérienne limite de dimension complexe paire M^n a deux valeurs propres, 0 et $\frac{1}{n-2}S$, avec les multiplicités 2 et $n-2$ respectivement, où S représente la courbure scalaire de M.*

La preuve est basée sur une récurrence faisant apparaître 6 équations différentes indexées sur les entiers positifs et qui permettent d'obtenir des informations sur les fonctions symétriques des valeurs propres du tenseur de Ricci.

Deux ans plus tard j'ai réussi à utiliser cet argument afin d'obtenir la preuve complète de la conjecture (cf [[12]]). Les méthodes employées faisant appel de manière essentielle à la géométrie Spin^c, je les présente plus loin, dans la section 2.2 (cf. théorème 1.2.4).

1.1.3 Variétés admettant des spineurs de Killing

L'existence des spineurs de Killing (ou de supersymétries si on utilise le langage des physiciens) sur une variété spinorielle a des conséquences importantes sur la géométrie de cette variété, comme on l'a vu dans le théorème de Bär, par exemple. Dans cette section je présenterai les résultats que j'ai obtenus sur les variétés admettant des spineurs de Killing qui appartiennent aux familles B, C et D décrites par le théorème de Bär.

Commençons par l'étude des variétés admettant une G_2–structure presque parallèle que j'ai faite dans le cadre d'un travail de recherche avec Friedrich, Kath et Semmelmann [[6]]. Une G_2–structure presque parallèle sur une variété M^7 est une 3–forme ω de type algébrique spécial, satisfaisant $d\omega = \lambda * \omega$ pour une constante non–nulle $\lambda \in \mathbb{R}$. L'existence d'une telle structure est équivalente à l'existence d'un spineur de Killing sur M; si la dimension de l'espace des spineurs de Killing est égale à 1, la G_2–structure correspondante est dite *propre*. Les résultats principaux de [[6]] consistent en la classification de ces variétés dans le cas homogène, et en la construction de nouveaux exemples non–homogènes:

Théorème 1.1.8 [[6]] – *Toute variété homogène simplement connexe admettant une structure G_2 presque parallèle est isométrique à un des espaces M^7 contenus dans les trois tableaux suivants (les définitions exactes de ces espaces se trouvent dans* [[6]]*).*

M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	dim[Iso]
(S^7, can)	SO(8)	28
$N(1,1)$	$SU(3) \times SU(2)$	11

Tableau 1. Variétés 3–sasakiennes

M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	dim[Iso]
$M(3,2)$	$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$	12
$V_{5,2}$	$SO(5)\times U(1)$	11
$Q(1,1,1)$	$SU(2)\times SU(2)\times SU(2)\times U(1)$	10

Tableau 2. Variétés d'Einstein–Sasaki

M^7	$\mathrm{Iso}_o(M^7)$	dim [Iso]
(S^7,g_{squas})	$Sp(2)\times Sp(1)$	13
$SO(5)/SO(3)$	$SO(5)$	10
$N(k,l),(k,l)\neq(1,1)$	$SU(3)\times U(1)$	9

Tableau 3. Variétés admettant une G_2–structure presque parallèle propre

Les nouveaux exemples non–homogènes de G_2–structures presque parallèles *propres* mentionés plus haut sont obtenus en appliquant le résultat suivant aux variétés 3–sasakienne $S(p_1,p_2,p_3)$ construites par Charles Boyer, Krysztof Galicki et Benjamin Mann [24].

Théorème 1.1.9 [[6]] – *La deuxième métrique d'Einstein sur une variété 3–sasakienne de dimension 7 admet une G_2–structure presque parallèle propre.*

De plus on obtient un autre résultat intéressant concernant les zéros des isométries infinitésimales de ces espaces.

Théorème 1.1.10 [[6]] – *Toute composante connexe N de l'ensemble des zéros d'une isométrie infinitésimale sur une variété admettant une G_2–structure presque parallèle propre est de dimension 1 ou 3. Dans le dernier cas N est un espace de courbure sectionnelle constante.*

J'ai continué l'étude des isométries infinitésimales des variétés admettant des spineurs de Killing dans [[13]], où je décris la représentation de l'algèbre de Lie $i(M)$ sur l'espace des spineurs de Killing pour les variétés d'Einstein–Sasaki et 3–sasakienne de dimension 7. J'ai obtenu des théorèmes de décomposition pour cette représentation, et comme corollaire j'ai démontré le

Théorème 1.1.11 [[13]] – *Sur une variété 3–sasakienne simplement connexe de dimension 7 non–isométrique à la sphère S^7, toute isométrie infinitésimale est une combinaison linéaire à coefficients constants des champs de vecteurs sasakiens.*

Enfin, j'ai obtenu un autre résultat concernant les variétés 3–sasakienne dans [[3]] où, en construisant des spineurs propres à l'aide des spineurs projetables, je trouve des valeurs propres explicites de l'opérateur de Dirac sur ces variétés:

Théorème 1.1.12 [[3]] – *Sur une variété de dimension $n = 4k - 1$ admettant une structure 3–sasakienne, $-1 - \frac{n}{2}$ et $2 + \frac{n}{2}$ sont des valeurs propres de l'opérateur de Dirac. La multiplicité de la valeur propre $-1 - \frac{n}{2}$ est au moins égale à $3(k - 1)$. La multiplicité de la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$ est au moins égale à $k - 1$.*

1.1.4 Spineurs parallèles

Le problème de la classification des variétés spinorielles simplement connexes admettant des spineurs parallèles se réduit, d'après les travaux de McKenzie Wang et Nigel Hitchin, à un problème de la théorie des représentations ([32], [42]). J'ai considéré trois généralisations naturelles de ce problème. La première traite le cas non simplement connexe. La deuxième traite le cas Spin^c et sera présentée dans la section suivante. La troisième concerne enfin les *structures de Weyl* admettant des spineurs parallèles.

Commençons par l'étude [[14]] que j'ai réalisée en collaboration avec Semmelmann. Notre résultat principal donne un critère d'existence des spineurs parallèles sur les variétés non simplement connexes uniquement en termes de leur groupe d'holonomie riemannienne $\mathrm{Hol}(M)$. Plus précisément, on a

Théorème 1.1.13 [[14]] – *Une variété riemannienne orientée irréductible non simplement connexe (M^n,g) admet une structure spinorielle admettant un spineur parallèle si et seulement si il existe un morphisme injectif $\varphi : Hol(M) \to Spin_n$, inverse à droite pour la projection sur SO_n, tel que la restriction de la représentation spinorielle à $\varphi(Hol(M))$ ait un point fixe.*

Les groupes d'holonomie ayant cette propriété algébrique ont été classifiés par Wang dans [43]. Nous construisons ensuite, pour la plupart des groupe de la liste de Wang, des exemples de variétés riemanniennes ayant ces groupes comme groupe d'holonomie. Enfin, nous étudions également la question de l'unicité de la structure spinorielle admettant des spineurs parallèles. Le résultat que nous obtenons est le suivant:

Théorème 1.1.14 [[14]] – *Sur une variété spinorielle donnée, les structures spinorielles admettant des spineurs parallèles sont en correspondence bijective avec les plongements du groupe d'holonomie riemannienne dans $Spin_n$ satisfaisant les conditions du théorème précédent.*

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons les premiers exemples de variétés admettant deux structures spinorielles non–équivalentes avec des spineurs parallèles.

L'autre problème présenté dans cette section concerne la classification des structures de Weyl D sur les variétés conformes admettant des spineurs D–parallèles [[2]]. Ce problème est invariant par changement conforme de la métrique [30]. En utilisant le calcul spinoriel et les relations entre spineurs et structures presque complexes en dimension 4 j'ai obtenu le résultat suivant

Théorème 1.1.15 [[2]] – *Soit D une structure de Weyl sur une variété spinorielle (M^n,g), $n \geq 3$. Supposons qu'il existe sur M un spineur D–parallèle nonnul. Alors:*

- *si $n \neq 4$, M est localement conformément équivalente à une variété admettant des spineurs parallèles;*
- *si $n = 4$, M est une variété hyperhermitienne;*
- *si $n = 4$ et M est compacte, M est conformément équivalente à l'une des variétés suivantes:*
  - *un tore plat;*
  - *une surface $K3$;*
  - *une surface de Hopf quaternionienne avec sa métrique standard localement conformément plate.*

Remarquons que, d'après ce théorème, les seules solutions intéressantes (c–à–d qui ne sont pas localement conformément équivalentes à des variétés admettant des spineurs parallèles) qu'on pourrait trouver devraient être construites sur des variétés non–compactes de dimension 4. L'exemple suivant montre que de telles solutions existent

Exemple [[2]] – Soit $u : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur l'ouvert U. Considérons la métrique riemannienne

$$g_u = dz_1\, d\bar{z}_1 + |u|^2 dz_2\, d\bar{z}_2.$$

Les relations

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = \bar{u}\, dz_1 \wedge d\bar{z}_2 \quad \text{et} \quad \Omega_3 = i\,(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + |u|^2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$$

définissent les formes de Kähler de 3 structures hermitiennes $J_1,\ J_2, J_3$ sur (U,g_u). La forme de Lee (commune) de ces structures hermitiennes définit une structure de Weyl D admettant des spineurs parallèles. De plus, si

$$u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2} \neq \frac{\partial u}{\partial z_1}\frac{\partial u}{\partial z_2}\ ,$$

alors D est non–fermée, et par conséquent (U,g_u,D) est une solution non–triviale de notre problème.

1.2 Structures Spin^c et applications

Une des limitations de la géométrie spinorielle vient du fait que la condition topologique nécessaire pour l'existence des spineurs (l'annullation de la deuxième classe de Stiefel–Whitney, $\mathfrak{w}_2$) est assez restrictive. Des variétés comme les espaces projectifs complexes en dimension complexe paire, par exemple, ne sont pas spinorielles. De ce fait, les résultats obtenus par le biais de la géométrie spinorielle "classiques" peuvent comporter des limitations sur la parité de la dimension (cf. par exemple [[5]]). La solution que j'ai trouvée pour pallier à ce problème à été d'affaiblir la condition topologique de spinorialité, tout en supposant l'existence des spineurs complexes. Ceci peut être réalisé dans le cadre de la géométrie Spin^c, qui est, de plus, très adaptée au contexte kählérien.

Qu'est-ce qu'une structure Spin^c exactement? Tout part de la remarque suivante: la représentation spinorielle *complexe* du groupe Spin_n est la restriction de la représentation spinorielle d'un groupe plus grand, qui est $\mathrm{Spin}_n^c := \mathrm{Spin}_n \times_{\mathbb{Z}_2} S^1 \subset \mathbb{C}\mathrm{l}_n$. Ainsi, on peut introduire les spineurs complexes sur toute variété admettant un fibré principal de groupe Spin_n^c compatible avec la structure riemannienne. L'existence d'un tel fibré (appelé structure Spin^c) est moins restrictive que l'existence d'une structure spinorielle, elle demande seulement l'existence d'une classe de cohomologie entière dont la restriction modulo 2 soit égale à $\mathfrak{w}_2$. En particulier, une variété spinorielle est automatiquement Spin^c, mais aussi, toute variété presque complexe est Spin^c car $c_1 = \mathfrak{w}_2 \bmod 2$.

Dans [[9]] je définis l'analogue des notions de spineur de Killing kählérien et spineur projetable dans le cadre des structures Spin^c, et par des méthodes semblables à celles utilisées dans [[1]], [[5]] et [35], je démontre le

Théorème 1.2.1 [[9]] – *Soit M une variété kählérienne compacte de dimension complexe $4l+1$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) *M est l'espace de twisteurs d'une variété quaternion–kählérienne à courbure scalaire positive;*

(ii) *M est de Kähler–Einstein et admet une structure complexe de contact;*

(iii) *Il existe une structure Spin^c sur M avec fibré auxiliaire L et fibré des spineurs ΣM tel que $L^{\otimes(2l+1)} \cong \Lambda^{4l+1,0}M$ et ΣM possède un spineur de Killing kählérien $\Psi \in \Gamma(\Sigma_{2l+1}M \oplus \Sigma_{2l+2}M)$.*

Ainsi qu'il a été mentionné auparavant, ce résultat contient le théorème de LeBrun, qui caractérise les variétés de Kähler–Einstein de contact comme étant des espaces de twisteurs de variétés quaternion–kählériennes à courbure scalaire positive.

Dans le cadre de la géométrie Spin^c, je me suis également intéressé aux spineurs parallèles et de Killing. Voici, à ce propos, la classification obtenue dans [[7]].

Théorème 1.2.2 [[7]] – *Une variété Spin^c simplement connexe M admet des spineurs parallèles si et seulement si elle est isométrique (en tant que variété Spin^c) à un produit riemannien $M_1 \times M_2$ entre une variété kählérienne simplement connexe (avec sa structure Spin^c canonique) et une variété spinorielle simplement connexe admettant un spineur parallèle.*

A la base de la démonstration se trouve l'idée suivante: toute distribution définie naturellement sur une variété riemannienne par un objet parallèle (le spineur Spin^c en l'occurence), est elle–même parallèle. Si l'on note le spineur par Ψ et on dérive une deuxième fois l'équation $\nabla\Psi = 0$, on trouve, après une contraction de Clifford:

$$\mathrm{Ric}(X) \cdot \Psi = iX \lrcorner \omega \cdot \Psi,$$

où $i\omega$ est la 2–forme à valeurs imaginaires qui définit la courbure du fibré déterminant de la structure Spin^c.

Cette relation nous amène naturellement à considérer la distribution E qui en chaque point x de M est définie par

$$E_x = \{X \in T_xM \mid \exists Y \in T_xM,\ X \cdot \Psi = iY \cdot \Psi\}.$$

D'après ce qui précède, E est parallèle, donc M se décompose en un produit riemannien $M_1 \times M_2$. Le restant de le preuve découle d'une étude attentive des propriétés des distributions E et $E^\perp$.

J'ai ensuite considéré le problème de la classification des variétés Spin^c admettant des spineurs de Killing, que j'ai pu résoudre grâce au théorème 1.2.2 et à l'utilisation d'une notion appropriée de spineur projetable. Le résultat est le suivant:

Théorème 1.2.3 [[7]] – *Soit M une variété Spin^c simplement connexe. Alors M admet des spineurs de Killing si et seulement si elle satisfait une des conditions ci–dessous:*

- *M est une variété spinorielle admettant des spineurs de Killing;*
- *M admet une structure sasakienne.*

L'intérêt de ce résultat est de mettre en évidence des propriétés spinorielles des variétés sasakiennes jusqu'ici ignorées. De la même manière que les variétés d'Einstein–Sasaki sont étudiés à travers les spineurs de Killing, on devrait pouvoir étudier les variétés de Sasaki à travers les spineurs de Killing associés à leur structure Spin^c canonique définie dans [[7]].

La géométrie Spin^c s'est aussi montrée très utile dans la solution de la conjecture de Lichnerowicz sur les variétés kählériennes limites de dimension complexe paire, dont il a été question dans la section 2.1.2.

Théorème 1.2.4 [[12]] – *Une variété kählérienne limite de dimension complexe paire est localement un produit riemannien $T^2 \times N$ d'un tore plat de dimension 2 et d'une variété kählérienne limite N de dimension complexe impaire.*

Les idées principales de la démonstration sont les suivantes: on applique tout d'abord le résultat de [[8]] pour montrer que le fibré tangent d'une variété kählérienne limite est une somme directe de deux distributions orthogonales et involutives (ce sont en fait les espaces propres du tenseur de Ricci, vu comme famille d'endomorphismes sur la variété). En modifiant la métrique par un facteur constant dans une des deux directions, j'obtiens des informations sur le tenseur de courbure, qui impliquent en particulier que les variétés intégrales de la deuxième distribution sont compactes et simplement connexes. On considère ensuite la restriction d'un spineur–limite à une de ces variétés intégrales, et on montre qu'on obtient un spineur de Killing kählerien Spin^c. Ce dernier induit un spineur de Killing Spin^c sur le fibré canonique de la variété intégrale, et un spineur Spin^c parallèle sur le cône de ce fibré canonique. En utilisant ma classification des variétés Spin^c admettant des spineurs parallèles (voir théorème 1.2.2) ci–dessus) et un résultat d'irréductibilité de Sylvestre Gallot [26], je déduis que la structure Spin^c de la variété intégrale est plate, ce qui implique aisément que le tenseur de Ricci de la variété initiale est parallèle. Le résultat en découle alors immédiatement.

Toujours dans le cadre de la géométrie Spin^c, je me suis intéressé, en collaboration avec Herzlich, aux minorations conformes de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés Spin^c. La motivation initiale de ce travail (faisant l'objet de l'article [[11]]) était l'article [30] dans lequel Hijazi obtient une inégalité entre la première valeur propre de l'opérateur de Dirac et celle du laplacien conforme d'une variété spinorielle compacte, généralisant ainsi l'inégalité classique de Friedrich [27]. Dans la première partie de [[11]] nous étendons cette inégalité au cas Spin^c, en utilisant l'invariance conforme de l'opérateur de Dirac.

Théorème 1.2.5 [[11]] – *Soit (M,g,L,A) une variété Spin^c compacte de dimension $n \geq 3$, où A représente la connexion du fibré déterminant L. Si l'on note par $i\Omega$ la forme de courbure de A, alors la première valeur propre λ_1 de l'opérateur de Dirac sur le fibré des spineurs associé à cette structure Spin^c satisfait l'inégalité*

$$\lambda_1^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\mu_1$$

où μ_1 désigne la première valeur propre de l'opérateur de Yamabe perturbé, L_Ω, défini par

$$L_\Omega = 4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g + \mathrm{Scal}^g - 2\left[\frac{n}{2}\right]^{1/2}|\Omega|_g.$$

Nous étudions ensuite le cas–limite de l'inégalité obtenue, ce qui nous amène à considérer le problème de l'existence des spineurs de Killing généralisés sur les variétés Spin^c, c–à–d des sections Ψ du fibré des spineurs Spin^c satisfaisant:

$$\nabla_X\Psi = fX\cdot\Psi \qquad \forall X \in TM$$

pour une certaine fonction f. Dans le cas spinoriel, un raisonnement simple montre que f est constante. Cependant ce raisonnement n'est plus valable dans le cas Spin^c, et nous développons une nouvelle technique afin de montrer que les spineurs de Killing généralisés avec f non–constante ne peuvent pas exister sur les variétés Spin^c de dimension $n \geq 4$. Nous construisons également des exemples de variétés Spin^c de dimension 2 et 3 admettant des spineurs de Killing généralisés non–triviaux.

Chapitre 2

Interprétation spinorielle de structures géométriques spéciales

2.1 En géométrie presque hermitienne

2.1.1 Variétés approximativement kählériennes

Dans la classification de Bär des variétés admettant des spineurs de Killing (théorème 1.1.1), une classe particulière est celle des variétés approximativement kählériennes (ou *nearly Kähler*) de dimension 6, appelées NK dans ce qui suit. Une variété presque hermitienne (M,g,J) est NK si la relation $(\nabla_X J)X = 0$ est satisfaite quelque soit le vecteur X. Une variété NK est appelée *stricte* s'il n'existe aucun vecteur non–nul X tel que $\nabla_X J = 0$.

Des exemples de variétés NK sont fournis par les espaces 3–symétriques (c–à–d admettant en chaque point des symétries géodésiques d'ordre 3) où par les espaces de twisteurs des variétés quaternion–kählériennes avec une métrique canoniquement modifiée le long des fibres.

Un résultat très inattendu d'Alfred Gray dans les années 70, affirmant que toute variété NK stricte de dimension 6 est d'Einstein, peut être mieux compris à la lumière du théorème 1.1.1 (car, en effet, une variété admettant des spineurs de Killing est automatiquement d'Einstein).

Il paraît donc naturel de supposer que les variétés NK sont intéressantes surtout en dimension 6, et ce fait vien d'être mis en évidence très récemment par Paul–Andi Nagy, qui a montré que toute variété NK simplement connexe est un produit riemannien de variétés 3–symétriques, d'espaces de twisteurs et de variétés NK de dimension 6 (cf [39]).

Il a été remarqué par Gray que la connexion hermitienne canonique sur une variété NK joue un rôle très spécial, et d'un certain point de vue elle est plus utile que la connexion de Levi–Civita. En 1993, Ramon Reyes–Carrión a démontré que l'holonomie de la connexion hermitienne canonique est réductible pour toute variété NK provenant d'un espace de twisteurs, et a conjecturé que la réciproque est également vraie.

Dans un travail en collaboration avec Belgun [[16]], nous montrons que cette conjecture est vraie en dimension 6, en utilisant des méthodes de la théorie classique des feuilletages. Ce résultat a ensuite été géneralisé à toutes les dimensions par Nagy [39].

2.1.2 Le tenseur de Ricci sur les variétés kählériennes

Mes résultats concernant les variétés kählériennes limites en dimension complexe paire (voir le théorème 1.1.7 plus haut) soulèvent la question suivante: *Si le tenseur de Ricci d'une variété kählérienne compacte a exactement deux valeurs propres constantes, est–il alors parallèle?* Dans un travail en collaboration avec Apostolov et Draghici, nous avons donné une réponse partielle à cette question:

Théorème 2.1.1 [[15]] – *Soit (M,g,J) une variété kählérienne compacte dont le tenseur de Ricci a exactement deux valeurs propres constantes non–négatives. Alors M est localement isométrique à un produit riemannien de deux espaces d'Einstein.*

La démonstration repose sur un argument de type Weitzenböck appliqué au tenseur de courbure, déjà utilisé par Kouei Sekigawa dans sa démonstration de la conjecture de Goldberg positive. Nous remarquons d'ailleurs que la question ci–dessus est fortement liée à la conjecture de Goldberg. En effet, un contre–exemple éventuel à cette question (avec les deux valeurs propres négatives), fournirait, après une modification de la métrique et de la structure presque complexe, un contre–exemple à la conjecture de Goldberg.

En dimension 4, des méthodes venant de la théorie de Seiberg–Witten permettent d'améliorer le théorème précédent dans le sens que la conclusion reste vraie si au moins une des deux valeurs propres est non–négative (voir [[15]] pour les détails).

2.1.3 Formes–twisteurs sur les variétés kählériennes

Sur toute variété spinorielle avec fibré des spineurs ΣM, le produit tensoriel $\Sigma M \otimes TM$ se décompose sous l'action de Spin_n de la façon suivante:

$$\Sigma M \otimes TM \;\cong\; \Sigma M \oplus \Sigma^{3/2} M,$$

où $\Sigma^{3/2}M$ peut être identifié au noyau de la multiplication de Clifford. Si l'on note π_1 et π_2 les projections orthogonales correspondantes, nous obtenons deux opérateurs naturels agissant sur les spineurs: l'opérateur de Dirac $D := \pi_1 \circ \nabla$ et l'opérateur des twisteurs $T := \pi_2 \circ \nabla$. Les noyaux de ces opérateurs sont constitués respectivement des *spineurs harmoniques* et des *spineurs–twisteurs*.

De la même manière, pour toute variété riemannienne, on peut décomposer

$$T^*M \otimes \Lambda^p T^*M \;\cong\; \Lambda^{p-1}T^*M \oplus \Lambda^{p+1}T^*M \oplus \Lambda^{p,1}T^*M,$$

où $\Lambda^{p,1}T^*M$ désigne le produit de Cartan de T^*M et Λ^pT^*M. En composant les trois projections orthogonales ainsi définies avec la derivée covariante, on obtient la codifférentielle, la différentielle exterieure, et *l'opérateur des twisteurs* dont le noyau est constitué des *formes–twisteurs.*

J'ai commencé, en collaboration avec Semmelmann, une étude systématique des formes–twisteurs sur les variétés admettant des structures spéciales. Nous donnons dans [[18]] la description complète des formes–twisteurs sur les variétés kählériennes compactes. Le résultat peut se résumer ainsi:

Théorème 2.1.2 [[18]] – *Toute forme–twisteur sur une variété kählérienne compacte s'obtient de manière canonique à partir de formes parallèles et hamiltoniennes.*

Rappelons que les formes hamiltoniennes, introduites récemment par Apostolov, Calderbank et Gauduchon dans [19], sont des 2–formes de type (1,1) sur les variétés kählériennes satisfaisant une certaine équation différentielle de type fini. Leur nom vient du fait qu'elles engendrent (du moins dans le cas générique) des actions hamiltoniennes du tore T^n sur la variété, où n désigne la dimension complexe de la variété.

En fait ce problème a déjà été étudié dans les années 70 par Yamaguchi et al. [21] qui affirment que, à quelques exceptions près, n'apparaissant qu'en petites dimensions, toute forme–twisteur sur une variété kählérienne compacte est parallèle. La démonstration est malheureusement fausse (à cause de l'oubli d'un terme dans une suite d'égalités), ainsi que le résultat, qui ne fait pas référence aux formes hamiltoniennes.

2.2 En géométrie métrique de contact

Je me suis tout d'abord intéressé aux isométries des variétés de contact du point de vue de la géométrie spinorielle. Ainsi, dans l'article [[13]], j'ai décrit la représentation de l'algèbre des isométries infinitésimales sur l'espace des spineurs de Killing pour les variétés d'Einstein–Sasaki et 3–sasakiennes.

Plus récemment, dans un travail en collaboration avec Belgun et Semmelmann [[17]], j'ai étudié le problème plus général suivant: Sur une variété métrique de contact, quelles sont les positions relatives du groupe d'automorphismes de la structure métrique de contact et du groupe des isométries? Autrement dit, y a–t–il des isométries qui ne préservent pas la structure de contact? Les résultats principaux de ce travail peuvent se résumer ainsi:

Théorème 2.2.1 [[17]] – *Soit M une variété sasakienne. Si M n'est pas une sphère ou une variété 3–sasakienne, alors tout champ de Killing sur M est un automorphisme infinitésimal de la structure de contact. Si M est 3–sasakienne, alors l'algèbre de Lie des isométries infinitésimales se décompose en la somme directe $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{su}_2$, où $\mathfrak{g}_0$ désigne l'algèbre des automorphismes infinitésimaux de la structure 3–sasakienne et $\mathfrak{su}_2$ est l'algèbre engendrée par les champs de Killing définissant la structure 3–sasakienne.*

Rappelons qu'une variété de K–contact est une variété riemannienne admettant un champ de Killing ξ de norme 1 dont la dérivée covariante définit une structure complexe sur la distribution orthogonale à ξ. Une variété sasakienne est bien évidemment un cas particulier de structure K–contact.

Théorème 2.2.2 [[17]] – *Soit M une variété de K–contact. Alors, s'il existe des isométries infinitésimales de norme constante qui ne préservent pas la structure de contact, M est une variété faiblement 3–sasakienne.*

Je renvoie le lecteur à l'article original pour la définition de cette dernière notion et pour les preuves de ces résultats.

Enfin une classification complète des variétés de Sasaki homogènes est aisément obtenue en utilisant ces résultats.

Bibliographie

Publications propres

[1] A. MOROIANU, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes,* Commun. Math. Phys. **169** (1995), 373–384.

[2] A. MOROIANU, *Structures de Weyl admettant des spineurs parallèles,* Bull. Soc. Math. France **124** (1996), 685–695.

[3] A. MOROIANU, *Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3–structure de Sasaki,* Stud. Cerc. Mat. **48** (1996), 85–88.

[4] A. MOROIANU, *Formes harmoniques en présence de spineurs de Killing kählériens,* C. R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), 679–684.

[5] A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Kählerian Killing Spinors, Complex Contact Structures and Twistor Spaces,* C. R. Acad. Sci. Paris **323** (1996), 57–61.

[6] Th. FRIEDRICH, I. KATH, A, MOROIANU, U. SEMMELMANN, *On nearly parallel G_2–structures,* J. Geom. Phys. **23** (1997), 259–286.

[7] A. MOROIANU, *Parallel and Killing Spinors on Spin^c Manifolds,* Commun. Math. Phys. **187** (1997), 417–428.

[8] A. MOROIANU, *On Kirchberg inequality for compact Kähler manifolds of even complex dimension,* Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), 235–242.

[9] A. MOROIANU, *Complex Contact Structures and Spin^c Manifolds,* Commun. Math. Phys. **193** (1998), 661–673.

[10] A. MOROIANU, *Spineurs et variétés de Hodge,* Rev. Roum. Math. Pures Appl. **43** (1998), 615–626.

[11] M. HERZLICH, A. MOROIANU, *Generalised Killing Spinors and Conformal Eigenvalue Estimates for Spin^c Manifolds,* Ann. Global Anal. Geom. **17** (1999), 341–370.

[12] A. MOROIANU, *Kähler Manifolds with Small Eigenvalues of the Dirac Operator and a Conjecture of Lichnerowicz,* Ann. Inst. Fourier. **49** (1999), 1637–1659.

[13] A. MOROIANU, *On the Infinitesimal Isometries of Manifolds with Killing Spinors,* J. Geom. Phys. **35** (2000), 63–74.

[14] A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Parallel Spinors and Holonomy Groups,* J. Math. Phys. **41** (2000), 2395–2402.

[15] V. APOSTOLOV, T. DRAGHICI, A. MOROIANU, *A splitting theorem for Kähler manifolds with constant eigenvalues of the Ricci tensor,* Int. J. Math. **12** (2001), 769–789.

[16] F. BELGUN, A. MOROIANU, *Nearly Kähler manifolds with restricted holonomy,* Ann. Global Anal. Geom. **19** (2001), 307–319.

[17] F. BELGUN, A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Symmetries of Contact Metric Manifolds,* math.DG/0203090.

[18] A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Twistor Forms on Kähler Manifolds,* math.DG/0204322.

Autres références bibliographiques

[19] V. APOSTOLOV, D. CALDERBANK, P. GAUDUCHON, *Hamiltonian 2–forms in Kähler geometry I*, math.DG/0202280.

[20] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER, *The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds,* Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 422–433.

[21] J.–B. JUN, S. AYABE, S. YAMAGUCHI, *On the conformal Killing p–form in compact Kählerian manifolds,* Tensor **42** (1985), 258–271.

[22] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy,* Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509–521.

[23] J.P. BOURGUIGNON, P. GAUDUCHON, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques,* Commun. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[24] C.P. BOYER, K. GALICKI, B.M. MANN, *The Geometry and Topology of 3–Sasakian Manifolds,* Journ. Reine u. Angew. Math. **455** (1994), 183–220.

[25] E. CARTAN, *La théorie des spineurs*, Gauthier–Villars, Paris, 1937; 2ème édition, *The Theory of Spinors*, Hermann, Paris, 1966.

[26] S. GALLOT, *Équations différentielles caractéristiques de la sphère,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **12** (1979), 235–267.

[27] Th. FRIEDRICH, *Der erste Eigenwert des Dirac–Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung,* Math. Nach. **97** (1980), 117–146.

[28] Th. FRIEDRICH, *The Classification of 4–dimensional Kähler manifolds with small eigenvalue of the Dirac operator,* Math. Ann. **295** (1993), 565–574.

[29] M. GROMOV, H.B. LAWSON, *The Classification of Simply Connected Manifolds of Positive Scalar Curvature,* Ann. Math. **111** (1980), 209–230.

[30] O. HIJAZI, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors,* Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151–162.

[31] O. HIJAZI, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds,* Commun. Math. Phys. **160** (1994), 563–579.

[32] N. HITCHIN, *Harmonic Spinors,* Adv. Math. **14** (1974), 1–55.

[33] K.–D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291–325.

[34] K.–D. KIRCHBERG, *The first Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler Manifolds,* J. Geom. Phys. **7** (1990), 449–468.

[35] K.–D. KIRCHBERG, U. SEMMELMANN, *Complex Contact Structures and the first Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler Manifolds,* Geometric Anal. Functional Anal. **5** (1995), 604–618.

[36] C. LEBRUN, *Fano Manifols, Contact Structures, and Quaternionic Geometry,* Internat. J. Math. **6** (1995), 419–437.

[37] A. LICHNEROWICZ, *Spineurs harmoniques,* C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.

[38] A. LICHNEROWICZ, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac pour une variété kählérienne et son cas–limite,* C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 717–722.

[39] P.–A. NAGY, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations,* math.DG/0203038.

[40] R. REYES–CARRIÓN, *Some special geometries defined by Lie groups,* PhD Thesis, Oxford, 1993.

[41] S. SALAMON, *Quaternionic Kähler Manifolds,* Inventiones Math. **67** (1982), 143–171.

[42] M. WANG, *Parallel Spinors and Parallel Forms,* Ann. Global Anal. Geom. **7** (1989), 59–68.

[43] M. WANG, *On Non–simply Connected Manifolds with Non–trivial Parallel Spinors,* Ann Global Anal. Geom. **13** (1995), 31–42.