Mémoire de D.E.A.

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS ADMETTANT DES SPINEURS DE KILLING RÉELS

Andrei MOROIANU

(Université Paris XI et Ecole Normale Supérieure)

Directeur de stage :

Jean-Pierre BOURGUIGNON

(Ecole polytechnique)

Janvier-mai 1993

1. Introduction

Le rapport suit principalement le papier "Real Killing Spinors and Holonomy" de Christian Bär. Son but est la classification des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, admettant des spineurs de Killing. Soit (M, g) une variété spinorielle de dimension n, $P_{\text{Spin}(n)}M$ une structure spinorielle sur M, $\rho_n : \text{Spin}(n) \to \Sigma_n$ la représentation spinorielle, et $\Sigma M = P_{\text{Spin}(n)}M \times_{\rho_n} \Sigma_n$ le fibré spinoriel associé muni d'un produit scalaire complexe $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ défini par le produit hermitien canonique sur ΣM. Un champ spinoriel $\Psi \in \Gamma(\Sigma M)$ s'appelle un spineur de Killing de constante $\alpha \in \mathbb{C}$ si l'équation

$$\nabla_X \Psi = -\,\alpha\, X \cdot \Psi \tag{1}$$

est satisfaite pour tout vecteur tangent X.

Soit Ψ un spineur de Killing de constante α. On vérifie facilement que l'opérateur $\tilde{\nabla}_X = \nabla_X + \alpha\, X \cdot$ est une dérivée covariante sur le fibré spinoriel ΣM. Comme Ψ est parallèle, par définition, par rapport à cette nouvelle connexion, on voit qu'en particulier il ne s'annule pas sur M, un fait qu'on va utiliser dans un instant.

Soit Ψ un spineur de Killing de constante réelle α. On choisit $x \in M$ et un repère locale orthonormé $\{e_1, \cdots, e_n\}$ obtenu par transport parallèle d'une base orthonormale de T_xM le long des géodésiques par x et on considère le champ de vecteurs

$$X_\Psi = \sum_{j=1}^{n} i\, \langle \Psi, e_j \cdot \Psi \rangle_\Sigma e_j\ . \tag{2}$$

Pour voir que X_Ψ est un champ réel, on observe que pour tout vecteur Z et pour tout spineur Φ

$$\langle \Phi, Z \cdot \Phi \rangle_\Sigma = \langle Z \cdot \Phi, Z \cdot Z \cdot \Phi \rangle_\Sigma = -\ \overline{\langle \Phi, Z \cdot \Phi \rangle}_\Sigma\ ,$$

ce qui montre que $\langle \Phi, Z \cdot \Phi \rangle_\Sigma$ est un nombre imaginair pur. Ensuite, on calcule en x

$$\begin{aligned}
\nabla_Y (X_\Psi) &= i \sum_{j=1}^{n} \left\{ \langle \nabla_Y \Psi, e_j \cdot \Psi \rangle_\Sigma + \langle \Psi, e_j \cdot \nabla_Y \Psi \rangle_\Sigma \right\} e_j \\
&= -\, i\, \alpha \left\{ \sum_{j=1}^{n} \langle \Psi, (e_j \cdot Y - Y \cdot e_j) \cdot \Psi \rangle_\Sigma\, e_j \right\}\ ;
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que pour tout champ vectoriel X le tenseur $A_X = L_X - \nabla_X$ satisfait $A_X Y = -\ \nabla_Y X$, on déduit

$$\begin{aligned}
(L_{X_\Psi} g)(Y, Z) &= (A_{X_\Psi} g)(Y, Z) \\
&= -\ \langle \nabla_Y (X_\Psi), Z \rangle - \langle Y, \nabla_Z (X_\Psi) \rangle \\
&= i\, \alpha \left\{ \langle \Psi, (Z \cdot Y - Y \cdot Z) \cdot \Psi \rangle_\Sigma + \langle \Psi, (Y \cdot Z - Z \cdot Y) \cdot \Psi \rangle_\Sigma \right\} \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Donc X_Ψ est un champ de vecteurs de Killing, d'où la terminologie de spineur de Killing.

On va conclure cette section par montrer le résultat suivant

Proposition 1. Toute variété riemannienne qui admet un spineur de Killing de constante α est un espace d'Einstein avec $Ric = 4\,\alpha^2\,(n-1)$, où Ric (le tenseur de Ricci) est le tenseur de type (1,1) défini par

$$Ric(X) = \sum_{i=1}^{n} R_{X,e_i} e_i \ . \tag{3}$$

Preuve. Soit $\Re_{X,Y}$ l'opérateur de courbure sur ΣM. Du fait que

$$\nabla_X \nabla_Y \Psi = \nabla_X(-\alpha\, Y \cdot \Psi) = -\,\alpha\, \nabla_X Y \cdot \Psi + \alpha^2\, Y \cdot X \cdot \Psi \ ,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Re_{X,Y}\Psi &= \nabla_X \nabla_Y \Psi - \nabla_Y \nabla_X \Psi - \nabla_{[X,Y]}\Psi = \\
&= -\,\alpha\, \nabla_X Y \cdot \Psi + \alpha^2\, Y \cdot X \cdot \Psi - (-\alpha\, \nabla_Y X \cdot \Psi + \alpha^2\, X \cdot Y \cdot \Psi) + \\
&\quad +\alpha\, [X,Y] \cdot \Psi = \\
&= -\,\alpha^2\, (X \cdot Y - Y \cdot X) \cdot \Psi \\
&= 2\,\alpha^2\, (Y \cdot X + g(X,Y)) \cdot \Psi \ .
\end{aligned}$$

D'autre part, du théorème 4.15, p.110 de [9], on sait aussi que

$$\Re_{X,Y}\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle R_{X,Y} e_i, e_j \rangle\, e_i \cdot e_j \cdot \Psi \ .$$

On a donc obtenu

$$\frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle R_{X,Y} e_i, e_j \rangle\, e_i \cdot e_j \cdot \Psi = 2\,\alpha^2\, (Y \cdot X + g(X,Y)) \cdot \Psi \ .$$

D'ici on peut utiliser la formule $Ric(X) \cdot \Psi = -\,2 \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot \Re_{X,e_k} \Psi$ et on obtient

$$\begin{aligned}
Ric(X) \cdot \Psi &= -\,4\,\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot (e_k \cdot X + X_k) \cdot \Psi \\
&= -\,4\,\alpha^2\, (-n\, X + X) \cdot \Psi \\
&= 4\,\alpha^2\, (n-1)\, X \cdot \Psi \ ,
\end{aligned}$$

et du fait que Ψ ne s'annule pas sur M, on obtient la formule souhaitée.

Q.E.D.

2. Le cône sur une variété

Soit M une variété riemannienne avec la métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$. On définit le produit tordu $\bar{M} = M \times_{r^2} \mathbb{R}^+$, avec la métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{M}} = r^2\langle\cdot,\cdot\rangle_M + dr^2$. Alors la dérivée covariante $\overline{\nabla}$ de la connexion de Levi-Civitá de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{M}}$ satisfait les formules ([10], p.206)

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0 \ , \tag{4}$$

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} X = \overline{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} X \ , \tag{5}$$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - r\langle X, Y\rangle_M \frac{\partial}{\partial r} \ , \tag{6}$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M, identifiés aussi avec leurs prolongements canoniques à $\bar{M}$.

3. Structures de Sasaki

Définition 1. On appelle une structure métrique de contact sur une variété riemannienne (M, g) un ensemble (φ, X, η) où φ est un champ tensoriel de type (1,1), X est un champ de vecteurs, et η est une 1-forme, tels que

(i) $\quad \eta(U) = \langle U, X\rangle \quad , \quad \forall\, U$
(ii) $\quad \varphi^2 = -\, Id + \eta \otimes X$
(iii) $\quad g(\varphi(U), \varphi(V)) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V) \quad , \quad \forall\, U\,,\, V$
(iv) $\quad d\eta(U, V) = 2\, g(U, \varphi(V)) \quad , \quad \forall\, U\,,\, V$.

On vérifie facilement que on a alors aussi

$$\varphi(X) = 0 \tag{7}$$

$$\eta \circ \varphi = 0 \tag{8}$$

$$d\eta(X, U) = 0 \quad , \quad \forall\, U \tag{9}$$

Définition 2. On appelle une structure de Sasaki sur une variété riemannienne (M, g) un ensemble (φ, X, η) tel que
a) (φ, X, η) est une structure métrique de contact;
b) X est un champ de vecteurs de Killing, ou, de façon équivalente, $\nabla X = -\,\varphi$;
c) $(\nabla_V \varphi)W = \langle V, W\rangle X - \eta(W)V, \quad \forall\, U\,,\, V$.

Preuve de l'équivalence de b). On introduit d'abord le tenseur de type (2,0) $\overline{\varphi}$ associé à ∇X par $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$\overline{\varphi}(U,V)=\langle\nabla_U X, V\rangle, \tag{10}$$

et on observe que, d'une part

$$\nabla_U X = -\,\varphi(U) \iff \overline{\varphi}(U,V) = -\,\langle\varphi(U),V\rangle \iff 2\,\overline{\varphi}(U,V) = d\eta(U,V) \tag{11}$$

et d'autre part, X est un champ de vecteurs de Killing $\iff L_X g = 0 \iff A_X g = 0 \iff \langle A_X U, V\rangle + \langle A_X V, U\rangle = 0 \iff \overline{\varphi}$ est antisymétrique.

Il ne reste qu'à observer que

$$d\eta(U,V) = U\langle X,V\rangle - V\langle X,U\rangle - \langle X,[U,V]\rangle = \tag{12}$$

$$= \langle\nabla_U X, V\rangle - \langle\nabla_V X, U\rangle = \overline{\varphi}(U,V) - \overline{\varphi}(V,U)\ , \tag{13}$$

ce qui montre que $\overline{\varphi}$ est antisymétrique si et seulement si $2\,\overline{\varphi} = d\eta$.

Q.E.D.

Théorème 1. Il existe une correspondance bijective entre les structures de Sasaki sur M et les structures kählériennes sur $\bar{M}$ (défini dans la Section 2).

Preuve. Soit, d'abord (φ, X, η) une structure de Sasaki sur M. Sur $\bar{M}$ on considère le tenseur J de type (1,1) défini par

$$J(r\frac{\partial}{\partial r}) = X\ , \tag{14}$$

$$J(X) = -\,r\frac{\partial}{\partial r}\ , \tag{15}$$

$$J(V) = -\,\varphi(V)\ ,\quad si\quad V\perp X, V\perp\frac{\partial}{\partial r}\ . \tag{16}$$

Vérifions que J définit une structure presque complexe sur $\bar{M}$. Pour montrer que $J^2(U) = -\,U$, il suffit de prendre $U \perp X$ et $\frac{\partial}{\partial r}$. On applique *c)* avec $W = X,\ V = U \perp X$ et on obtient

$$\nabla_{\nabla_U X} X + \nabla_U \nabla_X X = U\ ; \tag{17}$$

d'autre part,

$$\varphi(X) = 0\quad ,\quad \text{i.e.}\quad \nabla_X X = 0\ ; \tag{18}$$

ces deux formules impliquent $J^2 = -\,1$.

Le fait que $g_{\bar{M}}(JU,JV)$=$g_{\bar{M}}(U,V)$ se démontre en regardant plusieurs cas (E, F est une notation générique pour les vecteurs perpendiculaires à X et $\frac{\partial}{\partial r}$)

$$\begin{aligned}
&g_{\bar{M}}(JX,JX)=r^2 g_{\bar{M}}\Big(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\Big)=r^2=r^2 g_M(X,X)=g_{\bar{M}}(X,X)\ ,\\
&g_{\bar{M}}\Big(JX,J\frac{\partial}{\partial r}\Big)=g_{\bar{M}}\Big(-r\frac{\partial}{\partial r},X\Big)=0=g_{\bar{M}}\Big(X,\frac{\partial}{\partial r}\Big)\ ,\\
&g_{\bar{M}}(JX,JE)=g_{\bar{M}}\Big(r\frac{\partial}{\partial r},\varphi(E)\Big)=0=g_{\bar{M}}(X,E)\ ,\\
&g_{\bar{M}}\Big(J\frac{\partial}{\partial r},J\frac{\partial}{\partial r}\Big)=r^{-2}g_{\bar{M}}(X,X)=g_M(X,X)=1=g_{\bar{M}}\Big(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\Big)\ ,\\
&g_{\bar{M}}\Big(J\frac{\partial}{\partial r},JE\Big)=r^{-1}g_{\bar{M}}(X,-\varphi(E))=\frac{1}{r}g_{\bar{M}}(\varphi(X),E)=0=g_{\bar{M}}\Big(\frac{\partial}{\partial r},E\Big)\ ,\\
&g_{\bar{M}}(JE,JF)=-\ g_{\bar{M}}(J(JE),F)=g_{\bar{M}}(E,F)\ .
\end{aligned}$$

Enfin, le fait que J est parallèle (et donc qu'il définit une structure kählérienne sur $\bar{M}$, par le théorème de Newlander - Nirenberg) résulte des équations 1) - 9) suivantes (Y et Z sont des vecteurs perpendiculaires à X et $\frac{\partial}{\partial r}$)

$$\begin{aligned}
1)\qquad & J\Big(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}\Big)=0\quad ,\quad \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\Big(J\frac{\partial}{\partial r}\Big)=\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{X}{r}=\frac{1}{r}\frac{X}{r}+X\Big(-\frac{1}{r^2}\Big)=0\ ;\\
2)\qquad & J(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}X)=J\Big(\frac{X}{r}\Big)=-\ \frac{\partial}{\partial r}\ ,\\
& \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}(JX)=\nabla_r\Big(-r\frac{\partial}{\partial r}\Big)=-\ \frac{\partial}{\partial r}-r\nabla_r\frac{\partial}{\partial r}=-\ \frac{\partial}{\partial r}\ ;\\
3)\qquad & J(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}Y)=J\Big(\frac{Y}{r}\Big)=-\ \frac{1}{r}\varphi(Y)\quad ,\quad \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}(JY)=-\ \frac{JY}{r}=-\ \frac{1}{r}\varphi(Y)\ ;
\end{aligned}$$

ça montre que $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} J = 0$; ensuite

$$4) \qquad J\left(\overline{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial r}\right) = J\left(\frac{X}{r}\right) = -\ \frac{\partial}{\partial r}\ ,$$

$$\overline{\nabla}_X\left(J\frac{\partial}{\partial r}\right) = \overline{\nabla}_X\left(\frac{X}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla_X X - r\, g_M\left(X, \frac{X}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} = -\ \frac{\partial}{\partial r}\ ;$$

$$5) \qquad J(\overline{\nabla}_X X) = J\left(-\ r\, g_M(X,X)\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\ r\, J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\ X\ ,$$

$$\overline{\nabla}_X(JX) = \overline{\nabla}_X\left(-\ r\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\ r\left(\frac{X}{r}\right) - X(r)\frac{\partial}{\partial r} = -\ X\ ;$$

6) $\quad (\nabla_X\varphi)(V) = \langle X, V\rangle X - \eta(V)X = 0 \Rightarrow \nabla_X\varphi(Y) = \varphi(\nabla_X Y) \Rightarrow$
$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y) \Rightarrow$
$\overline{\nabla}_X(JY) = J(\overline{\nabla}_X Y)$
(car on vérifie facilement que $\quad \overline{\nabla}_X Y \perp X, \dfrac{\partial}{\partial r}$),

donc $\overline{\nabla}_X J = 0$ aussi; enfin,

$$7) \qquad J\left(\overline{\nabla}_Y \frac{\partial}{\partial r}\right) = J\left(\frac{Y}{r}\right) = -\ \frac{1}{r}\varphi(Y)\ ,$$

$$\overline{\nabla}_Y\left(J\frac{\partial}{\partial r}\right) = \overline{\nabla}_Y\left(\frac{X}{r}\right) = \frac{1}{r}\nabla_Y X - \frac{1}{r} r\, g_M(X,Y) = -\ \frac{1}{r}\varphi(Y)\ ;$$

$$8) \qquad J(\overline{\nabla}_Y X) = J(\nabla_Y X) - r\, J\left(g_M(X,Y)\frac{\partial}{\partial r}\right) = J^2(Y) = -\ Y\ ,$$

$$\overline{\nabla}_Y(JX) = \overline{\nabla}_Y\left(-\ r\frac{\partial}{\partial r}\right) = -\ Y\ ;$$

$$\begin{aligned} 9) \qquad J(\overline{\nabla}_Y Z) &= J(\nabla_Y Z) - r\, J\left(\langle Y, Z\rangle\frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= J(\langle\nabla_Y Z, X\rangle X) + J(\nabla_Y Z - \langle\nabla_Y Z, X\rangle) - \langle Y, Z\rangle X \\ &= -\ r\,\langle X, \nabla_y Z\rangle\frac{\partial}{\partial r} - \varphi(\nabla_Y Z) - \langle Y, Z\rangle X\ , \end{aligned}$$

tandis que

$$\overline{\nabla}_Y(JZ) = -\ \overline{\nabla}_Y(\varphi(Z) = -\ \nabla_Y(\varphi(Z) - r\,\langle Y, \nabla_Z X\rangle\frac{\partial}{\partial r},$$

et comme $\langle X, \nabla_Y Z\rangle = -\ \langle Z, \nabla_Y X\rangle = \langle Y, \nabla_Z X\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} J(\overline{\nabla}_Y Z) - \overline{\nabla}_Y(JZ) &= (\nabla_Y\varphi)(Z) - \langle Y, Z\rangle X = \\ &= \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Donc on a vérifié que $\overline{\nabla} J = 0$.

Réciproquement, on va maintenant montrer que toute structure de Kähler sur $\bar{M}$ induit une structure de Sasaki sur M (identifié avec $M \times \{1\} \subset \bar{M}$). A partir de maintenant on se donne J, et on définit d'abord

$$X = J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) . \tag{19}$$

Vérifions que X est un champ de vecteurs de Killing. Il faut montrer que A_X est antisymétrique. On a

$$-\langle A_X V, W\rangle = \langle \nabla_V X, W\rangle = \langle \overline{\nabla}_V X + \langle V, X\rangle \frac{\partial}{\partial r}, W\rangle =$$

$$= \langle \overline{\nabla}_V \left(J\frac{\partial}{\partial r}\right), W\rangle = \langle J\overline{\nabla}_V \frac{\partial}{\partial r}, W\rangle = \langle JV, W\rangle,$$

donc $A_X = -\ J$, qui est antisymétrique. Ensuite, soit

$$\eta(V) = \langle X, V\rangle \ , \tag{20}$$

$$\varphi = -\ \nabla X \ . \tag{21}$$

Du fait que $\varphi = A_X$, il résulte que φ est antisymétrique. Pour conclure, il suffit de voir que (φ, X, η) vérifient le $a)$ et le $c)$ de la définition 2. Montrons que $\varphi(X) = 0$

$$\varphi(X) = -\ \nabla_X X = -\ \overline{\nabla}_X X - \langle X, X\rangle \frac{\partial}{\partial r} =$$

$$= -\ \overline{\nabla}_{J(\frac{\partial}{\partial r})} J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial r} = -\ J\overline{\nabla}_{J(\frac{\partial}{\partial r})} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} = -\ J\left(J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial r} = 0 \, .$$

Pour vérifier le $c)$ de la définition 2, on utilise de nouveau les formules des produits tordus (4), (5), (6)

$$\begin{aligned}
(\nabla_V \varphi)(W) &= -\ \nabla_V \nabla_W X + \nabla_{\nabla_V W} X \\
&= -\ \overline{\nabla}_V \nabla_W X - \langle \nabla_W X, V\rangle \frac{\partial}{\partial r} + \overline{\nabla}_{\nabla_V W} X + \langle \nabla_V W, X\rangle \frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\ \overline{\nabla}_V \overline{\nabla}_W X - \overline{\nabla}_V (\langle W, X\rangle \frac{\partial}{\partial r}) - \langle J\left(\nabla_W \frac{\partial}{\partial r}\right), V\rangle \frac{\partial}{\partial r} + \\
&\quad + \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}_V W} X + \overline{\nabla}_{\langle V, W\rangle \frac{\partial}{\partial r}} X + \langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle \frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\ J\overline{\nabla}_V W - \langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle \frac{\partial}{\partial r} - \langle W, \overline{\nabla}_V X\rangle \frac{\partial}{\partial r} - \langle W, X\rangle \overline{\nabla}_V \frac{\partial}{\partial r} - \\
&\quad - \langle JW, V\rangle \frac{\partial}{\partial r} + J(\overline{\nabla}_V W) + \langle V, W\rangle X + \langle \overline{\nabla}_V W, X\rangle \frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\ \langle W, JV\rangle \frac{\partial}{\partial r} - \langle W, X\rangle V - \langle JW, V\rangle \frac{\partial}{\partial r} + \langle V, W\rangle X \\
&= \langle V, W\rangle X - \langle W, X\rangle V \ .
\end{aligned}$$

Enfin, on va montrer que (φ, X, η) satisfait $(i) - (iv)$ de la définition 1 (V et W sont des vecteurs arbitraires perpendiculaires à X et $\frac{\partial}{\partial r}$).

(i) est tautologique;

(ii)
$$\varphi^2(X) = 0 = (-Id + \eta \otimes X)(X) \ ,$$
$$\begin{aligned}\varphi^2(V) &= -\ \varphi(\nabla_V X) = -\ \varphi(\nabla_V X) + \nabla_V(\varphi(X)) \\ &= (\nabla_V \varphi)(X) = \langle V, X\rangle X - \langle X, X\rangle V = -\ V \\ &= (-Id + \eta \otimes X)(V) \ ;\end{aligned}$$

(iii)
$$g(\varphi(X), \varphi(X)) = 0 = g(X, X) - \eta(X)\eta(X) \ ,$$
$$g(\varphi(X), \varphi(V)) = 0 = g(X, V) - \eta(X)\eta(V) \ ,$$
$$\begin{aligned}g(\varphi(V), \varphi(W)) &= g(\nabla_V X, \nabla_W X) = g(\overline{\nabla}_V X, \overline{\nabla}_W X) \\ &= g(JV, JW) = g(V, W) = g(V, W) - \eta(V)\eta(W) \ ;\end{aligned}$$

(iv)
$$d\eta(X, X) = 0 = 2\, g(X, \varphi(X)) \ ,$$
$$d\eta(V, X) = 0 = 2\, g(V, \varphi(X)) \ ,$$
$$d\eta(V, W) = g(V, \varphi(W)) - g(W, \varphi(V)) = 2\, g(V, \varphi(W)) \ , \text{ de (12), (13).}$$

Avec ceci, on a établi la correspondance bijective entre les structures de Sasaki sur M et les structures kählériennes sur $\bar{M}$.

Q.E.D.

4. 3-Structures de Sasaki

Définition 3. On appelle une 3-structure de Sasaki sur une variété riemannienne M, un triplet (φ_i, X_i, η_i) , $i \in \{1, 2, 3\}$, *avec les relations suivantes*

$$[X_1, X_2] = 2\, X_3 \quad , \quad [X_2, X_3] = 2\, X_1 \quad , \quad [X_3, X_1] = 2\, X_2 \ ; \tag{22}$$

$$\varphi_3\varphi_2 = -\ \varphi_1 + \eta_2 \otimes \eta_3 \quad , \quad \varphi_2\varphi_3 = \varphi_1 + \eta_3 \otimes \eta_2 \ ; \tag{23}$$

$$\varphi_1\varphi_3 = -\ \varphi_2 + \eta_3 \otimes \eta_1 \quad , \quad \varphi_3\varphi_1 = \varphi_2 + \eta_1 \otimes \eta_3 \ ; \tag{24}$$

$$\varphi_2\varphi_1 = -\ \varphi_3 + \eta_1 \otimes \eta_2 \quad , \quad \varphi_1\varphi_2 = \varphi_3 + \eta_2 \otimes \eta_1 \ . \tag{25}$$

Remarque. De (22) et du fait que les X_i sont des champs de vecteurs de Killing, on obtient facilement les relations (à la première vue plus restrictives)

$$\nabla_{X_1} X_2 = X_3 \qquad \nabla_{X_2} X_1 = -\ X_3 \qquad \nabla_{X_2} X_3 = X_1 \ , \text{ etc.} \tag{26}$$

Par exemple, pour tout vecteur Z on a

$$g(\nabla_{X_2} X_1, Z) = -\ g(\nabla_Z X_1, X_2) =$$
$$= -\ Zg(X_1, X_2) + g(X_1, \nabla_Z X_2) = -\ g(Z, \nabla_{X_1} X_2) \ .$$

Définition 4. Une variété riemannienne N s'appelle hyperkählérienne s'il existe trois structures presque complexes parallèles I, J et K sur N, telles que $IJ = -\ JI = -\ K$.

Théorème 2. Il existe une correspondance bijective entre les 3-structures de Sasaki sur une variété M et les structures hyperkählériennes sur $\bar{M}$.

Preuve. Soit (φ_i, X_i, η_i) , $i \in \{1,2,3\}$ une 3-structure de Sasaki sur M. Comme dans la section précédente, on obtient trois structures kählériennes, I, J et K sur $\bar{M}$. Vérifions, par exemple que $IJ = -\ K$. On observe que (26) implique $\varphi_1(X_2) = X_3,\ \varphi_2(X_3) = X_1$, etc., donc

$$
\begin{aligned}
IJ\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) &= I(X_2) = -\ \varphi_1(X_2) = -\ X_3 = -\ K\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) \ , \\
IJ(X_1) &= I(-\varphi_2(X_1)) = I(X_3) = -\ \varphi_1(X_3) = \varphi_3(X_1) = -\ K(X_1) \ , \\
IJ(X_2) &= I(-r\frac{\partial}{\partial r}) = -\ X_1 = \varphi_3(X_2) = -\ K(X_2) \ , \\
IJ(X_3) &= I(-\varphi_2(X_3)) = I(-X_1) = r\frac{\partial}{\partial r} = -\ K(X_3) \ , \\
IJ(V) &= \varphi_1(\varphi_2(V)) = \varphi_3(V) + \eta_2(V)X_1 = \varphi_3(V) = -\ K(V) \ ,
\end{aligned}
$$

pour tout V perpendiculaire à X_1, X_2, X_3 .

Réciproquement, une structure hyperkählérienne sur $\bar{M}$ induit trois structures de Sasaki (φ_i, X_i, η_i) , $i \in \{1,2,3\}$ sur M, comme dans la section précédente. Pour vérifier (26), on écrit

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_2 &= \nabla_{I(\frac{\partial}{\partial r})}J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \overline{\nabla}_{I(\frac{\partial}{\partial r})}J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - g_{\bar{M}}\left(I\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= JI\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + g_{\bar{M}}\left(JI\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} = X_3 + g_{\bar{M}}\left(K\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= X_3 \ .
\end{aligned}
$$

Enfin, on vérifie, par exemple, la première équation de (23)

$$\begin{aligned}
\varphi_3(\varphi_2(X_1)) &= \nabla_{\nabla_{X_1}X_2}X_3 = \nabla_{(\overline{\nabla}_{X_1}X_2+g_{\bar{M}}(X_1,X_2)\frac{\partial}{\partial r})}X_3 \\
&= \overline{\nabla}_{(\overline{\nabla}_{X_1}X_2+g_{\bar{M}}(X_1,X_2)\frac{\partial}{\partial r})}X_3 \\
&\quad +g_{\bar{M}}(\overline{\nabla}_{X_1}X_2+g_{\bar{M}}(X_1,X_2)\frac{\partial}{\partial r},X_3)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \overline{\nabla}_{JI(\frac{\partial}{\partial r})}(K\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)) + g_{\bar{M}}\left(JI\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), K\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= K^2\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r} \\
&= 0 \\
&= (-\varphi_1+\eta_2\otimes X_3)(X_1)\ \text{, etc.}
\end{aligned}$$

Q.E.D

5. Le groupe exceptionnel G_2

Soit V un espace réel 7-dimensionnel, $\{e_1,\cdots,e_7\}$ une base de V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire associé et $\{\omega^1,\cdots,\omega^7\}$ la base correspondante duale de V^*. On utilise la notation ω^{ijk} pour $\omega^i\wedge\omega^j\wedge\omega^k$. Suivant Bryant ([4],p.539), on va définir G_2 comme le sous-groupe de $GL(V)$, préservant une certaine 3-forme. Plus précisément,

Définition 5. Soit $G_2=\{g\in GL(V)\mid g^*(\phi)=\phi\}$,*où*

(27) $$\phi=\omega^{123}+\omega^{145}+\omega^{167}+\omega^{246}+\omega^{257}+\omega^{347}+\omega^{356}\ .$$

Théorème 3. Le sous-groupe $G_2\subset GL(V)$ est compact, connexe, simple, simplement connexe et de dimension 14, inclus dans $SO(V)$. En plus, l'action de G_2 sur V est irréductible, et son action sur les sous-espaces de V de dimension 1 et 2 est transitive.

La démonstration donnée dans [4] ne comporte aucune difficulté.

Q.E.D.

On définit l'application bilinéaire $P:V\times V\to V$, associée à ϕ par $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(28) $$\langle P(x,y),z\rangle=\phi(x,y,z)\quad,\quad\forall\,x,y,z\in V$$

et on voit que $P(x,y)=-\,P(y,x)$ et $P(e_1,e_2)=e_3$, et en plus,

(29) $$\langle P(x,y),P(x,y)\rangle=\langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle-\langle x,y\rangle^2\ ,$$

(30) $$P(x,P(x,y))=-\,\langle x,x\rangle\,y+\langle x,y\rangle\,x\ .$$

Pour montrer (29), (30) on observe que G_2 laisse ϕ invariante par définition, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par le théorème 3, donc P est invariant par G_2. Par conséquent, il suffit de vérifier (29), (30) pour $x = \alpha\, e_1$ et $y = \beta\, e_1 + \gamma\, e_2$, et les deux formules sont évidentes en ce cas-là. Maintenant on va voir que ϕ a une propriété remarquable

Lemme 1. Soit $\psi \in \Lambda^3 V$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes
(i) Pour tour vecteur unitaire $X \in V$, la restriction de $\imath_X\psi$ à $X^\perp$ définit une structure complexe sur $X^\perp$ et $X^* \wedge \imath_X\psi \wedge \imath_X\psi \wedge \imath_X\psi = 6\,\omega^{1234567}$;
(ii) $\exists g \in SO(V)$ tel que $\psi = g^*\phi$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Il faut montrer qu'on peut trouver une base orthonormale de V, de telle manière que ψ ait dans cette base la même forme que ϕ dans la base $\{e_1, \cdots, e_7\}$. Pour tout vecteur unitaire$X$ de V on va noter J_X la structure complexe définie de $\imath_X\psi$ sur $X^\perp$. Soit $X = e_1$. On peut trouver une base orthonormée de $e_1^\perp$, $\{\ v_2, \cdots, v_7\}$ telle que

$$(31) \qquad J_{e_1}(v_2) = v_3 \quad , \quad J_{e_1}(v_4) = v_5 \quad , \quad J_{e_1}(v_6) = v_7\ .$$

Soit maintenant $X = v_2$. On voit immédiatement que $J_{v_2}(e_1) = -\ v_3$, donc J_{v_2} préserve le sous-espace engendré par v_4, v_5, v_6, v_7 . En faisant une rotation dans le plan (v_4, v_5), on peut supposer que $J_{v_2}v_4 \perp v_7$ mais alors $J_{v_2}v_4 \perp v_6$ aussi: sinon, ψ contient les terme $e_1 \wedge v_4 \wedge v_5$ et $\alpha\, v_2 \wedge v_4 \wedge v_5$, $\alpha \neq 0$ (on a identifié les vecteurs avec les formes duales), donc en tout cas le "coefficient" de $v_4 \wedge v_5$ dans ψ sera un vecteur Y de norme $r = \|Y\| > 1$. En prenant dans $(i)X = Y/r$, on voit que J_X envoie v_4 dans $(1/r)v_5$, ce qui est absurde.

On peut donc supposer $J_{v_2}v_4 = v_6$. D'ici on déduit assez vite que $J_{v_2}v_5 = \pm\, v_6$: soit $J_{v_2}v_5 = a\, v_4 + b\, v_6 + c\, v_7$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Alors $-v_5 = (J_{v_2}^2)v_5 = J_{v_2}(a\, v_4 + b\, v_6 + c\, v_7) = a\, v_6 - b\, v_4 + c\, J_{v_2}v_7$, ce qui implique $c^2 = 1 + a^2 + b^2$, donc $a = b = 0$. On a obtenu

$$(32) \qquad J_{v_2}e_1 = -\ v_3 \quad , \quad J_{v_2}v_4 = v_6 \quad , \quad J_{v_2}v_5 = \pm\, v_6\ .$$

De (31) et (32) et (i) appliqué à $X = e_3$ et $X = e_5$ on voit tout de suite que

$$(33) \qquad J_{v_4}v_3 = \pm\, v_7 \quad , \quad J_{v_5}v_3 = \pm\, v_6.$$

De (31), (32) et (33) on tire

$$\psi = e_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + e_1 \wedge v_4 \wedge v_5 + e_1 \wedge v_6 \wedge v_7 +$$

$$(34) \quad +v_2 \wedge v_4 \wedge v_6 \pm\ v_2 \wedge v_5 \wedge v_7 \pm\ v_3 \wedge v_4 \wedge v_7 \pm\ v_3 \wedge v_5 \wedge v_7 + \cdots\ .$$

Mais comme parmi les triplets d'indices apparaissant dans (34) on rencontre exactement une fois chaque paire d'indices entre 1 et 7, le même argument que celui utilisé tout à l'heure montre que l'expression du ψ est celle donnée dans (34), sans ajouter aucun terme supplémentaire

$$\psi = e_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + e_1 \wedge v_4 \wedge v_5 + e_1 \wedge v_6 \wedge v_7 +$$

$$+v_2 \wedge v_4 \wedge v_6 \pm v_2 \wedge v_5 \wedge v_7 \pm v_3 \wedge v_4 \wedge v_7 \pm v_3 \wedge v_5 \wedge v_7 \ . \tag{35}$$

Enfin, pour voir que les signes ambigús sont toutes "$-$", on n'a qu'à utiliser la deuxième condition du (i) avec $X = v_2$, $X = v_4$ et $X = v_6$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On observe d'abord que les deux relations du (i) restent vraies si on remplace ψ par $g^*\psi, g \in \mathrm{SO}(V)$. Il reste donc à vérifier (i) pour ϕ. On utilise le théorème 3: (i) est vrai pour $X = e_1$, et pour X arbitraire, il existe un $g \in G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ tel que $X = g(e_1)$. Alors, $\imath_X\phi = (g^*)^{-1}(\imath_{e_1}\phi) = g(\imath_{e_1}\phi)$, $X^* = (g^*)^{-1}(e_1^*) = g(e_1^*)$ et il est évident que $\imath_X\phi = g(\imath_{e_1}\phi)$ définit une structure complexe sur $X^\perp = g(e_1^\perp)$, et que $X^* \wedge \imath_X\psi \wedge \imath_X\psi \wedge \imath_X\psi = g(e_1^* \wedge \imath_{e_1}\psi \wedge \imath_{e_1}\psi \wedge \imath_{e_1}\psi) = g(6\,\omega^{1234567}) = 6\,\omega^{1234567}$.

Q.E.D.

On va appeler les 3-formes qui satisfont (i) ou (ii), des *3-formes distinguées.*

6. Variétés presque kählériennes

Définition 6. Une structure presque complexe J sur une variété riemannienne M s'appelle presque kählérienne si

$$(\nabla_X J)(X) = 0 \quad , \quad \forall X \in TM. \tag{36}$$

Une structure presque kählérienne s'appelle de type constant β si

$$|(\nabla_X J)(Y)|^2 = \beta\,(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2 - \langle JX, Y\rangle^2) \ . \tag{37}$$

On remarque que si J satisfait (37) alors il satisfait automatiquement (36), et que si $\beta \neq 0$, J n'est pas kählérienne. De (36) on déduit immédiatement

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \quad , \quad (\nabla_X J)(JX) = 0 \ , \tag{38}$$

$$(\nabla_X J)JY = (\nabla_{JX} J)Y = -\ J((\nabla_X J)Y) \ , \tag{39}$$

$$\langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle = -\ \langle(\nabla_X J)Z, Y\rangle \ . \tag{40}$$

Par exemple, pour montrer (40), on écrit

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle + \langle(\nabla_X J)Z, Y\rangle &= X\langle JY, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle - \langle J(\nabla_X Y), Z\rangle - \\ &\quad -\ \langle J(\nabla_X Y), Z\rangle + X\langle JZ, Y\rangle - \\ &\quad \langle JZ, \nabla_X Y\rangle - \langle J(\nabla_X Z), Y\rangle \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

(Donc dans [1],p.132, il n'est pas nécessaire d'utiliser la formule reliant ∇J , Φ et N, qui est assez longue à obtenir).

Si M est de dimension 4, alors toute structure presque kählérienne est en fait kählérienne: soit $x \in M$ et $X, Y \in T_xM$; si $Y \in (X, JX)$, (38) montre que $(\nabla_X J)Y = 0$. Sinon, $(X, JX, Y, JY) = T_xM$, et (38), (39), (40) montrent que $(\nabla_X J)Y \perp (X, JX, Y, JY)$, donc $(\nabla_X J)Y = 0$.

Si la dimension de M est 6, les structures presque kählériennes sont encore facile à caractériser.

Proposition 2. Soit M une variété presque kählérienne de dimension 6, et supposons que M soit pas kählérienne. Alors M est de type constant.

Preuve. Soient e_1, Je_1, e_2, Je_2 des champs de vecteurs orthonormales sur un ouvert U de M et on définit $\alpha\, e_3 = (\nabla_{e_1} J)e_2$, avec $|e_3| = 1$. Comme tout à l'heure, on remarque que e_3 et Je_3 sont perpendiculaires à (e_1, Je_1, e_2, Je_2), donc $(e_1, Je_1, e_2, Je_2, e_3, Je_3)$ est un repère orthonormé sur U. Mais alors

$(\nabla_{e_2} J)e_3 \perp (e_2, Je_2, e_3, Je_3)$, et aussi

$$\begin{aligned} \alpha \langle(\nabla_{e_2} J)e_3, e_1)\rangle &= \langle(\nabla_{e_2} J)(\nabla_{e_1} J)e_2, e_1\rangle = -\,\langle(\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_2} J)e_1\rangle \\ &= -\,\langle(\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_2} J)e_1\rangle = \langle(\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_1} J)e_2\rangle \\ &= \alpha^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \langle(\nabla_{e_2} J)e_3, Je_1)\rangle &= \langle(\nabla_{e_2} J)(\nabla_{e_1} J)e_2, Je_1\rangle = -\,\langle(\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_2} J)Je_1\rangle \\ &= -\,\langle(\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_2} J)Je_1\rangle = -\,\langle(\nabla_{e_1} J)e_2, J((\nabla_{e_1} J)e_2)\rangle \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

ce qui montre (α étant non-nul par l'hypothèse sur M)

$$(\nabla_{e_2} J)e_3 = \alpha\, e_1\ . \tag{41}$$

De même, on déduit

$$(\nabla_{e_3} J)e_1 = \alpha\, e_2\ . \tag{42}$$

D'ici, (37), avec $\beta = \alpha^2$, résulte simplement par vérification sur les éléments de la base $(e_1, Je_1, e_2, Je_2, e_3, Je_3)$. On fait aussi l'observation qu'en symétrisant (37), où par vérification directe, on obtient

$$\begin{aligned} \langle(\nabla_V J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle = \beta\{&\langle V, Y\rangle\langle X, Z\rangle - \langle V, Z\rangle\langle X, Y\rangle \\ &-\langle V, JY\rangle\langle X, JZ\rangle + \langle V, JZ\rangle\langle X, JY\rangle\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Q.E.D.

Maintenant on peut énoncer le résultat central de cette section.

Théorème 4. Soit M une variété de dimension 6. Alors il existe une correspondance bijective entre les structures presque kählériennes de type constant 1 sur M et les 3-formes distinguées sur $\bar{M}$ qui sont parallèles.

Preuve. Soit φ une telle forme sur $\bar{M}$. Comme d'habitude, on identifie M avec $M \times \{1\} \subset \bar{M}$ et on définit sur M la structure presque complexe J par

$$\langle X, JY\rangle = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y\right) . \tag{44}$$

Etant donné que φ soit distinguée, on voit que J est une structure presque complexe sur M. On calcule, ensuite

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X J)Z, Y\rangle &= \langle\nabla_X(JZ), Y\rangle - \langle J(\nabla_X Z), Y\rangle \\
&= X\langle Y, JZ\rangle - \langle\nabla_X Y, JZ\rangle - \langle J(\nabla_X Z), Y\rangle \\
&= X \cdot \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y, Z\right) - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_X Y, Z\right) - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y, \nabla_X Z\right) \\
&= X \cdot \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y, Z\right) - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, \overline{\nabla}_X Y, Z\right) - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y, \overline{\nabla}_X Z\right) \\
&= \varphi\left(\overline{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial r}, Y, Z\right) + (\overline{\nabla}_X \varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y, Z\right) \\
&= \varphi(X, Y, Z) .
\end{aligned}$$

Donc on a obtenu

$$\langle(\nabla_X J)Z, Y\rangle = \varphi(X, Y, Z) . \tag{45}$$

Il reste à montrer que J est presque kählérienne, de type constant 1. Mais le fait que J soit presque kählérienne est évident d'après (45), en mettant $X = Z$, donc il résulte de la proposition 2 que J est de type constant. Afin de calculer la constante, on choisit une base orthonormée $\{\frac{\partial}{\partial r}, e_1, \cdots, e_6\}$ de l'espace tangent à $\bar{M}$ dans un point, dans laquelle φ soit de la forme (27). En prenant $X = \frac{\partial}{\partial r}$, $Y = e_1$, on voit que J est en fait de type constant 1.

Alternativement, on observe que (45) relie la dérivée covariante de J à l'opérateur P défini dans (28), par

$$(\nabla_X J)Y = -\, P(X, Y) + \alpha\, \frac{\partial}{\partial r}$$

avec

$$\alpha = \langle P(X, Y), \frac{\partial}{\partial r}\rangle = \varphi\left(X, Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \langle X, JY\rangle .$$

d'où,

$$P(X,Y) = -\,(\nabla_X J)Y + \langle X, JY\rangle \frac{\partial}{\partial r}\ ; \tag{46}$$

donc (29) donne

$$\langle P(X,Y), P(X,Y)\rangle = |(\nabla_X J)Y|^2 + \langle X, JY\rangle^2, \tag{47}$$

et, enfin, du (30) et (47) on obtient (37) avec $\beta = 1$.

Réciproquement, soit J une structure presque kählérienne de type constant 1 sur M. Pour $x \in M, r \in \mathbb{R}^+$, et $X, Y, Z \in T_x M \subset T_{(x,r)}\bar{M}$, $\frac{\partial}{\partial r} \in T_r\mathbb{R}^+ \subset T_{(x,r)}\bar{M}$, on définit

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y\right) = -\,\varphi\left(X, \frac{\partial}{\partial r}, Y\right) = \varphi\left(X, Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = r^2\,\langle X, JY\rangle_M\ ,$$

$$\varphi(X,Y,Z) = r^3\,\langle Y, (\nabla_X J)(Z)\rangle_M\ .$$

Le fait que φ est alternée résulte de (38), (39) et (40). Pour montrer que φ est distinguée, on vérifie le (ii) du lemme 1. Soit $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2, e_3, Je_3\}$ le repère locale orthonormé autour de $x \in M$ choisit dans la section 5. En prenant $v_1 = \frac{\partial}{\partial r}$, $v_2 = e_1/r$, $v_3 = Je_1/r$, $v_4 = e_2/r$, $v_5 = Je_2/r$, $v_6 = e_3/r$, $v_7 = Je_3/r$, on obtient un repère orthonormé sur $\bar{M}$ autour de (x,r). Alors les relations (38), (39) et (40) montrent que dans cette base, φ a la forme (27). (La vérification de (i) du lemme 1 aurait été légèrement plus compliquée).

Enfin, on vérifie que φ est parallèle (ici on utilise la même notation X, Y,... pour un vecteur en x, pour un prolongement arbitraire mais fixé à M, et pour l'extension naturelle de ce prolongement à $\bar{M}$)

1)
$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\varphi)(X,Y,Z) &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(X,Y,Z)) - \varphi(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}X, Y, Z) - \\ &\quad - \varphi(X, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}Y, Z) - \varphi(X, Y, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}Z) \\ &= 3\,r^2\,\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle - 3\,r^2\,\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle = 0\ ;\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y\right)\right) - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}X, Y\right) - \\ &\quad - \varphi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}Y\right) \\ &= 2\,r\,\langle X, JY\rangle_M - 2\,r\,\langle X, JY\rangle_M \\ &= 0\ ;\end{aligned}$$

$$3)\qquad (\overline{\nabla}_X\varphi)\Big(\frac{\partial}{\partial r},Y,Z\Big) = X\Big(\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r},Y,Z\Big)\Big)-\varphi\Big(\overline{\nabla}_X\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big),Y,Z\Big)-$$
$$-\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r},\overline{\nabla}_XY,Z\Big)-\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r},Y,\overline{\nabla}_XZ\Big)$$
$$= r^2\,X\langle Y,JZ\rangle_M - r^2\,\langle Y,(\nabla_XJ)Z\rangle_M -$$
$$-\,r^2\,\langle\nabla_XY,JZ\rangle_M - r^2\,\langle Y,J(\nabla_XZ)\rangle_M$$
$$= 0\ .$$

La partie la plus difficile est de montrer que $(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y,Z,W)=0$. Pour cela, on va utiliser la formule (43) et le résultat suivant

Proposition 3. Pour tous champs de vecteurs X,Y,Z,W sur une variété presque kählérienne M, l'identité suivante est vérifiée

$$(48)\qquad 2\langle(\nabla^2_{X,Y}J)W,Z\rangle=\sum_{Y,W,Z}\langle(\nabla_XJ)Y,J(\nabla_WJ)Z\rangle\ .$$

La démonstration se trouve dans [6].

Pour conclure la démonstration du théorème, on calcule d'abord (en remplaçant $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ par $\langle\cdot,\cdot\rangle$, pour alléger les notations)

$$\begin{aligned}\langle(\nabla^2_{X,Y}J)W,Z\rangle &= -\frac{1}{2}\sum_{Y,W,Z}\langle(\nabla_XJ)Y,(\nabla_WJ)JZ\rangle\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{Y,W,Z}\{\langle X,W\rangle\langle Y,JZ\rangle-\langle X,JZ\rangle\langle Y,W\rangle+\\ &\quad +\langle X,JW\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle\}\ ,\end{aligned}$$

et après les simplifications on obtient
(49)
$$\langle(\nabla^2_{X,Y}J)W,Z\rangle=\langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle+\langle X,Y\rangle\langle W,JZ\rangle+\langle X,W\rangle\langle Z,JY\rangle\ .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}0 &= \langle(\nabla^2_{X,Y}J)W,Z\rangle-\{\langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle+\langle X,Y\rangle\langle W,JZ\rangle+\langle X,W\rangle\langle Z,JY\rangle\ \}\\ &= \langle\nabla_X((\nabla_YJ)W)-(\nabla_{\nabla_XY}J)W-(\nabla_YJ)(\nabla_XW),Z\rangle-\\ &\quad -\{\langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle+\langle X,Y\rangle\langle W,JZ\rangle+\langle X,W\rangle\langle Z,JY\rangle\ \}\end{aligned}$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y,Z,W) &= X(\varphi(Y,Z,W)) - \varphi\Big(\nabla_X Y - r\,\langle X,Y\rangle\frac{\partial}{\partial r}, Z, W\Big) - \\
&\quad - \varphi\Big(Y, \nabla_X Z - r\,\langle X,Z\rangle\frac{\partial}{\partial r}, W\Big) - \\
&\quad - \varphi\Big(Y, Z, \nabla_X W - r\,\langle X,W\rangle\frac{\partial}{\partial r}\Big) \\
&= r^3\Big\{X\langle Z,(\nabla_Y J)W\rangle - \\
&\quad - (\langle Z,(\nabla_{\nabla_X Y}J)W\rangle - \langle X,Y\rangle\langle Z,JW\rangle) - \\
&\quad - (\langle \nabla_X Z,(\nabla_Y J)W\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle) - \\
&\quad - (\langle Z,(\nabla_Y J)(\nabla_X W)\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,JZ\rangle)\Big\} \\
&= r^3\Big\{\langle \nabla_X((\nabla_Y J)W) - (\nabla_{\nabla_X Y}J)W - (\nabla_Y J)(\nabla_X W), Z\rangle - \\
&\quad - \{\langle X,Z\rangle\langle Y,JW\rangle + \langle X,Y\rangle\langle W,JZ\rangle + \langle X,W\rangle\langle Z,JY\rangle\ \}\Big\} \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

7. Le groupe Spin(7)

Dans cette section on utilise les notations de la section 5. Soient V_+ l'espace vectoriel réel de dimension 8 obtenu à partir de V par augmentation ($V_+ = \mathbb{R}e_0 \oplus V$), $\{\omega^0,\cdots,\omega^7\}$ la base duale de $\{e_0,\cdots,e_7\}$ dans V_+^* , $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire qui rend la base $\{e_0,\cdots,e_7\}$ orthonormée, et $\Phi \in \Lambda^4(V_+^*)$ donnée par

(50) $$\Phi = \omega^0 \wedge \phi + *\phi\ .$$

On calcule sans difficulté

(51) $$\Phi \wedge \Phi = 14\,\omega^{01234567}\ ,$$

et aussi

(52) $$\Phi = \frac{1}{2}\,\alpha\wedge\alpha + \mathrm{Re}(\beta)\ ,$$

où

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{01} + \omega^{23} + \omega^{45} + \omega^{67}\ , \\
\beta &= (\omega^0 + i\omega^1)\wedge(\omega^2 + i\omega^3)\wedge(\omega^4 + i\omega^5)\wedge(\omega^6 + i\omega^7)\ .
\end{aligned}
$$

Comme dans le cas de G_2, on va introduire Spin(7) d'une manière moins habituelle. Soit $G = \{g \in GL(V_+) \mid g^*(\Phi) = \Phi\}$.

Théorème 5 ([4], p.545). Le sous-groupe G est compact, connexe, simplement connexe et de dimension 21. En plus, l'action de G sur V_+ est irréductible, et son action sur les k-planes de V_+ est transitive pour tout $k \neq 4$. Enfin, G préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, son centre est $\mathbb{Z}_2 = \{\pm Id_{V_+}\}$, et $G/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(7)$, ce qui montre que $G = Spin(7)$.

La démonstration donnée dans [4] peut être suivie sans difficulté, modulo une inexactitude (la définition correcte de H est $H = \{h \in \mathrm{SO}(8) \mid h^*(\alpha) = \alpha, h^*(\beta) = \beta\}$), et l'utilisation de la classification des algèbres de Lie.

Q.E.D.

L'analogie avec le cas de G_2 se prolonge avec le résultat d'algèbre linéaire suivant.

Lemme 2. Soit $\Psi \in \Lambda^4(V_+^*)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes
(i) Pour tout vecteur unitaire $X \in V_+$, la restriction du $\imath_X\Psi$ à $X^\perp$ est une 3-forme distinguée φ sur $X^\perp$, et la restriction de Ψ lui-même est $*_7\varphi$, où $*_7$ représente l'opérateur de dualité sur $X^\perp$;
(ii) L'assertion (i) est valable pour $X = e_0$;
(iii) Ψ peut être écrite comme $\Psi = \omega^0 \wedge \varphi + *_7\varphi$, où φ est une 3-forme distinguée sur $e_0^\perp$.

Preuve. Les implications $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(ii) \Rightarrow (iii)$ étant évidentes, on va montrer $(iii) \Rightarrow (i)$. Soit donc $\Psi = \omega^0 \wedge \varphi + *_7\varphi$. Le fait que (i) a lieu pour $X = e_0$ est tautologique. Pour $X \in V_+$ arbitraire, on applique le théorème 5 et on trouve $g \in \mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$ avec $X = g(e_0)$. Alors, d'une part, $\imath_X\Psi = (g^*)^{-1}(\imath_{e_0}\Psi) = g(\varphi)$, qui est une 3-forme distinguée sur $x^\perp = g(e_1^\perp)$, et d'autre part, $\Psi|_{X^\perp} = g(\Psi)|_{g(e_0^\perp)} = g(\Psi)|_{e_0^\perp} = g(*_7\varphi) = *_7 g(\varphi)$.

Q.E.D.

Définition 7. Une 4-forme qui satisfait les conditions équivalentes du lemme 2 va être appelée une 4-forme distinguée.

Enfin, on conclut avec le résultat suivant.

Théorème 6. Soit M une variété de dimension 7. Alors il existe une correspondance bijective entre les 4-formes distinguées parallèles sur $\bar{M}$ et les 3-formes distinguées φ sur M qui satisfont $\nabla\varphi = *\varphi$.

Preuve. Soit Φ une 4-forme distinguée parallèle sur $\bar{M}$ .On définit sur M (identifié comme d'habitude avec $M \times \{1\} \subset \bar{M}$),

$$\varphi(X,Y,Z) = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) . \tag{53}$$

Le fait que φ est une 3-forme distinguée sur M est évident du fait que Φ est une 4-forme distinguée. En plus, on a évidemment $\Phi = dr \wedge \varphi + *\varphi$, donc

$$\begin{aligned}
(\nabla_W \varphi)(X,Y,Z) &= W\left(\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right)\right) - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, \nabla_W X, Y, Z\right) - \\
&\quad - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, \nabla_W Y, Z\right) - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, \nabla_W Z\right) \\
&= W\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, \overline{\nabla}_W X, Y, Z\right) - \\
&\quad - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, \overline{\nabla}_W Y, Z\right) - \Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, \overline{\nabla}_W Z\right) \\
&= (\overline{\nabla}_W \Phi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) + \Phi\left(\overline{\nabla}_W \frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) \\
&= \Phi(W,X,Y,Z) \\
&= (*\varphi)(W,X,Y,Z) .
\end{aligned}$$

Réciproquement, soit φ une 3-forme distinguée sur M qui satisfait $\nabla\varphi = *\varphi$. On définit sur $\bar{M}$ une 4-forme Φ par

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) = r^3 \varphi(X,Y,Z) , \tag{54}$$

$$\Phi(W,X,Y,Z) = r^4 (\nabla_W \varphi)(X,Y,Z) = r^4 (*\varphi)(W,X,Y,Z) . \tag{55}$$

Pour éviter les confusions possibles, on va noter "$*$" l'opérateur de dualité sur M, et "$*_{\bar{M}}$" l'opérateur de dualité sur le sous-fibré $E \subset T^*\bar{M}$ des formes sur $\bar{M}$ qui ne contiennent pas dr (E est un fibré euclidien, avec la métrique induite de $T^*\bar{M}$). Comme avant, on utilise la même notation $(X, Y, ...)$ pour des champs de vecteurs sur M et pour leurs prolongements naturels à $\bar{M}$. On considère la 3-forme $\tilde{\varphi}$ sur $\bar{M}$ donnée par

$$\tilde{\varphi}_{(x,r)}\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y\right) = 0 , \tag{56}$$

$$\tilde{\varphi}_{(x,r)}(X,Y,Z) = \varphi_x(rX, rY, rZ) . \tag{57}$$

Du fait que la transformation $T_x M \to T_{(x,r)}\bar{M}$ donnée par $X_x \mapsto rX_{(x,r)}$ est une isométrie, et du fait que φ est une 3-forme distinguée sur M, on déduit que $\tilde{\varphi}$ est une 3-forme distinguée sur $\bar{M}$. Ensuite, la même isométrie montre que

$$(*_{\bar{M}}\tilde{\varphi})(W,X,Y,Z) = (*\varphi)(rW,rX,rY,rZ) = r^4(*\varphi)(W,X,Y,Z) \ ,$$

donc de (54), (55) on tire

$$\Phi = dr \wedge \tilde{\varphi} + (*_{\bar{M}}\tilde{\varphi}) \ , \tag{58}$$

i.e. Φ est une 4-forme distinguée sur $\bar{M}$.

Pour voir que Φ est parallèle, on vérifie d'abord les trois cas plus simples

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\Phi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\big(r^3\varphi(X,Y,Z)\big) - 3\,r^2\varphi(X,Y,Z) \\
&= 0 \ , \\
(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}}\Phi)(X,Y,Z,T) &= \frac{\partial}{\partial r}\big(r^4(*\varphi)(X,Y,Z,T)\big) - 4\,r^3(*\varphi)(X,Y,Z,T) \\
&= 0 \ , \\
(\overline{\nabla}_W\Phi)\left(\frac{\partial}{\partial r}, X, Y, Z\right) &= W(r^3\varphi(X,Y,Z)) - \Phi\left(\frac{W}{r}, X, Y, Z\right) - \\
&\quad - r^3\varphi(\nabla_W X, Y, Z) - r^3\varphi(X, \nabla_W Y, Z) - \\
&\quad - r^3\varphi(X,Y,\nabla_W Z) \\
&= r^3(\nabla_W\varphi)(X,Y,Z) - \Phi\left(\frac{W}{r}, X, Y, Z\right) = \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Finalement, pour montrer que les termes de la forme $(\overline{\nabla}_W\Phi)(X,Y,Z,T)$ sont tous nuls, on fait deux observations

a) La forme volume sur M est parallèle, donc $\nabla_W(*\varphi) = *(\nabla_W\varphi)$;

b) Si W^* est la forme duale de W par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, alors

$$*(\imath_W(*\varphi)) = \varphi \wedge W^* \ . \tag{59}$$

(par linéarité, il suffit de faire la vérification pour $\varphi = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ et $W = \partial/\partial x_3$, ou $W = \partial/\partial x_4$).

En fait, a) et b) sont valables en général, pour tous M , W , φ, modulo un signe qu'il faut ajouter dans un des membres de (59). Donc,

$$\begin{aligned}
(\nabla_W(*\varphi)) &= *(\nabla_W\varphi(X,Y,Z,T)) \\
&= *(\imath_W(*\varphi)) \\
&= \varphi \wedge W^* \ ,
\end{aligned}$$

et on peut conclure

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_W\Phi)(X,Y,Z,T) &= r^4(\nabla_W(*\varphi)) + r^3\varphi(Y,Z,T)\cdot r\langle W,X\rangle - \\
&- \ r^3\varphi(X,Z,T)\cdot r\,\langle W,Y\rangle + r^3\varphi(X,Y,T)\cdot r\,\langle W,Z\rangle - \\
&- \ r^3\varphi(X,Y,Z)\cdot r\,\langle W,T\rangle \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Q.E.D.

8. La connexion modifiée

Maintenant on a tous les outils nécessaires pour attaquer notre problème — la classification des variétés admettant des spineurs de Killing réels. On reprend les notations de la première section. A partir de maintenant, M est une variété riemannienne spinorielle (donc orientable, en particulier), avec une orientation donnée, $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ est le fibré principal des repères orientés orthonormés (un repère $u \in P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ au-dessus de $x \in M$ est une isométrie $u : \mathbb{R}^n \to T_xM$ qui préserve l'orientation), $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$ est une structure spinorielle donnée, $\varphi : P_{\mathrm{Spin}(n)}(M) \to P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ et $\theta : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ sont les revêtements à deux feuillets, et enfin, ω_{LC} la forme de connexion de la connexion de Levi-Civitá sur M, et $\tilde{\omega}_{LC}$ la forme de la connexion induite sur $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$.

On va d'abord déduire la formule générale qui relie la forme de connexion sur un fibré principal, et la dérivée covariante de cette connexion sur un fibré vectoriel associé.

Donc, en toute généralité, on prend un fibré principal P au-dessus de M avec le groupe G, $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire fidèle de G, et $E = P \times_\rho V$ le fibré vectoriel associé à ρ. On se donne ω une forme de connexion sur P, et on veut calculer la dérivée covariante par rapport à cette connexion d'une section locale σ de E. Soit $x \in M$, $X \in T_xM$, et x_t un chemin dans M avec $x_0 = x$ et $\dot{x}_0 = X$. Par définition, σ peut être écrite comme $\sigma = s(\xi)$, où s est une section locale de P et $\xi \in V$ est un vecteur constant. On note $v_t = s(x_t)$. Alors il existe un unique relèvement horizontal u_t de x_t dans P, tel que $u_0 = v_0$, et on obtient un chemin a_t dans G par e, en demandant $v_t = u_t a_t$. On va noter l'action de P sur V par $[\cdot,\cdot] : u(\xi) = [u, \xi]$

Utilisant le fait que le transport paralel $\tau_0^t : E_{x_t} \to E_{x_0}$ est donné par $\tau_0^t = u_0 \circ u_t^{-1}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\nabla_X \sigma &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\tau_0^t \sigma) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\tau_0^t v_t \xi) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (u_0 \circ u_t^{-1}(v_t \xi) \\
&= u_0 \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\rho(a_t)\xi) \right) \\
&= u_0(\rho_*(\dot{a}_0)\xi) \ ;
\end{aligned}
$$

d'autre part on observe que

$$\begin{aligned} s_*(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(s(x_t)) = \dot{v}_0 \\ &= R_{a_t}(\dot{u}_0) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(u_0 a_t) \end{aligned}$$

est la décomposition de $s_*(X)$ dans la partie horizontale et la partie verticale. En particulier, la définition d'une forme de connexion montre que

$$\omega(s_*(X)) = \omega\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(u_0 a_t)\right) = \dot{a}_0 \ .$$

On a donc obtenu

$$\nabla_X[s,\xi] = [s, \rho_*(\omega(s_* X)) \cdot \xi] \ . \tag{60}$$

Si on applique (60) dans le cas où $P = P_{\mathrm{Spin}(n)}(M),\ V = \Sigma_n,\ \rho = \rho_n$ et $\omega = \tilde{\omega}_{LC}$, on déduit que

$$\nabla_X[\tilde{h},\xi] = [s, (\rho_n)_*(\tilde{\omega}_{LC}(\tilde{h}_* X)) \cdot \xi] \ . \tag{61}$$

pour toute section locale $\tilde{h}$ de $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$. On observe que si $h = \varphi \circ \tilde{h}$ est la section correspondante de $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ et η la forme canonique sur $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par $(\eta(V_u) = u^{-1}(\pi_* V))$, alors, de manière tautologique,

$$X = [h, \eta(h_* X)] \ , \ \forall X \in TM \ .$$

Maintenant c'est le moment d'introduire le fibré de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(M)$, associé à (M,g). La fibre de $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(M)$ au-dessus d'un point $x \in M$ est l'algèbre de Clifford $\mathbb{C}l_n(T_xM,g)$. Plus précisément, on définit d'abord $\mathrm{Cl}_n(M)$ comme le fibré vectoriel associé à la représentation naturelle de $\mathrm{SO}(n)$ sur Cl_n, ensuite on vérifie que la multiplication $[h,a]\cdot[h,b] = [h,ab]$ est bien définie et induit une structure d'algèbre sur chaque fibre, et enfin, on définie $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(M)$ comme le complexifié de $\mathrm{Cl}_n(M)$. Comme ρ_n est en fait la restriction d'une représentation de $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$, on peut regarder chaque fibre de ΣM comme un module sur la fibre correspondante de $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(M)$.

On fait la remarque que le fibré de Clifford est défini pour chaque variété riemannienne, en contraste avec le cas des structures spinorielles, l'existence desquelles demandant qu'une certaine condition topologique sur M (l'annulation de la deuxième classe de Stiefel-Whitney) soit satisfaite.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Afin d'étudier les spineurs de Killing, on considère la connexion modifiée $\tilde{\nabla}$ de ΣM définie par $\tilde{\nabla}_X\Psi = \nabla_X\Psi + \alpha\, X \cdot \Psi$. Pour calculer sa forme de connexion (sur $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$), on utilise le fait que, par définition, la multiplication de Clifford est donnée par

$$[h,a]\cdot[\tilde{h},\zeta] = [\tilde{h}, (\rho_n a)(\zeta)] \ , \ \forall a \in \mathbb{C}\mathrm{l}_n,\ \zeta \in \Sigma_n \ ,$$

et que $\tilde{\omega}_{LC} = (\theta_*)^{-1} \cdot \varphi^* \omega_{LC}$, donc

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X[\tilde{h}, \xi] &= \nabla_X[\tilde{h}, \xi] + \alpha\,[h, \eta(h_* X)] \cdot [\tilde{h}, \xi] \\
&= [\tilde{h}, (\rho_n)_* \big(\tilde{\omega}_{LC}(\tilde{h}_* X)\big)\xi + \alpha\,(\rho_n)_*(\eta(h_* X))\xi] \\
&= [\tilde{h}, (\rho_n)_* \cdot \theta_*^{-1}(\omega_{LC}(h_* X))\xi + \alpha\,(\rho_n)_*(\eta(h_* X))\xi] \\
&= [\tilde{h}, (\rho_n)_* \big((\theta_*^{-1} \cdot \omega_{LC} + \alpha\,\eta)(h_* X)\big)\xi]\ .
\end{aligned}$$

Utilisant ceci et de la formule générale (60), on déduit que la forme de connexion de $\tilde{\nabla}$ est $\hat{\omega} = \varphi^*(\theta_*^{-1} \cdot \omega_{LC} + \alpha\,\eta)$. Le problème ici est que $\hat{\omega}$, restreinte à $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$, ne prend pas ses valeurs dans $spin(n) \subset cl_n$, mais dans la sous-algèbre de Lie $spin(n) \oplus \mathbb{R}^n \subset cl_n$. On arrive donc de façon naturelle à considérer l'algèbre de Lie $spin(n) \oplus \mathbb{R}^n$ et de chercher le sous-groupe connexe et simplement connexe de $U\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ engendré par cette algèbre de Lie. Il s'agit, évidemment, de l'image de $\mathrm{Spin}(n+1)$ par

$$\mathrm{Spin}(n+1)\ \subset\ \mathbb{C}\mathrm{l}^0_{n+1} \xrightarrow[\simeq]{\psi} \mathbb{C}\mathrm{l}_n$$

L'isomorphisme ψ est donné sur une base de $\mathbb{C}\mathrm{l}^0_{n+1}$ par

$$\begin{aligned}
\psi(e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2l}}) &= e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2l}}\ , \\
\psi(e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2k+1}} \cdot e_{n+1}) &= e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_{2k+1}}\ .
\end{aligned}$$

(En fait, pour montrer l'existence et les propriétés de ψ, on introduit d'abord l'inverse de ψ par $\psi^{-1}(e_i) = e_i \cdot e_{n+1}$, on prolonge ψ^{-1} ainsi défini à $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ par la propriété d'universalité de celle-ci, etc.).

On voit donc que la connexion $\tilde{\nabla}$ ne peut pas être réduite à $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$ (comme l'était ∇), mais en revanche elle peut être réduite à $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$, qu'on regarde comme le fibré obtenu par l'élargissement du groupe structurel de $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$ à $\mathrm{Spin}(n+1)$. On va appeler $\tilde{\omega}$ la forme de connexion de $\tilde{\nabla}$ sur $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$, et on voit que $\hat{\omega}$ est la restriction de $\tilde{\omega}$ à $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$.

De la même manière on étend $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ à $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$, et on prolonge φ à $\tilde{\varphi}\ :\ P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M) \to P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$ par

$$\tilde{\varphi}[\tilde{u}, a] = [\varphi(\tilde{u}), \theta(a)]\ ,\ \forall\ \tilde{u} \in P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)\ ,\ a \in \mathrm{Spin}(n+1)\ .$$

Soit $\tilde{\varphi}_* \tilde{\nabla}$ la connexion induite sur $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$, et ω sa forme de connexion, qui satisfait $\tilde{\varphi}^* \omega = \tilde{\theta}_* \tilde{\omega}$, où $\tilde{\theta}$ est la projection $\mathrm{Spin}(n{+}1) \to \mathrm{SO}(n{+}1)$. Pour calculer l'expression de ω, il faut expliciter $\tilde{\theta}_*$. D'abord, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(n+1) & \longrightarrow^{\tilde{\theta}} & \mathrm{SO}(n+1) \\
i\uparrow & & i\uparrow \\
\mathrm{Spin}(n) & \longrightarrow^{\theta} & \mathrm{SO}(n)
\end{array}$$

car, si on identifie $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$, et on prend $\tilde{v} = (v, t)$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta} \circ i(a)(\tilde{v}) &= a \cdot (v + t\, e_{n+1}) \cdot a^{-1} = a \cdot v \cdot a^{-1} + t\, e_{n+1} \\
&= (a \cdot v \cdot a^{-1}, t) = (\theta(a)(v), t) \\
&= i \circ \theta(a)(\tilde{v}) \ .
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\theta}|_{spin(n)} = \theta$. Pour calculer l'expression de θ_* on fixe $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i < j$, et on considère le chemin $\gamma(t)$ dans $\mathrm{Spin}(n)$,

$$\gamma(t) = (e_i \sin t - e_j \cos t) \cdot (e_j \cos t + e_i \sin t) = \cos(2\, t) + e_i \cdot e_j \sin(2\, t) \ ,$$

et du fait que $\gamma(0) = 1$, $\dot{\gamma}(0) = 2\, e_i \cdot e_j$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\theta_*(e_i \cdot e_j)(e_k) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma(t) \cdot e_k \cdot \gamma(t)^{-1}) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Big((\cos(2\, t) + e_i \cdot e_j \sin(2\, t)) \cdot e_k \cdot \\
&\qquad \cdot (\cos(2\, t) - e_i \cdot e_j \sin(2\, t)) \Big)
\end{aligned}$$

et un calcul élémentaire montre que

$$2\theta_*(e_i \cdot e_j)(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i, j \ ; \\ 4\, e_j & \text{si k=i} \ ; \\ -4\, e_i & \text{si k=j} \ . \end{cases}$$

Donc, si on note

$$A_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

on voit que l'isomorphisme θ_* entre $spin(n)$ et $so(n)$ est $\theta_*(e_i \cdot e_j) = -\, 2A_{ij}$. Le calcul ci-dessus montre, en particulier, que via l'identification de $e_i \cdot e_{n+1} \in spin(n+1)$ avec $e_i \in \mathbb{R}^n \subset cl_n$ par ψ_*, on a $\tilde{\theta}_*(e_i) = -\, 2A_{i,n+1}$, i.e.

$$\tilde{\theta}_*(v) = \begin{pmatrix} 0_n & -\, 2\, v \\ 2\, v^t & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Finalement, sur $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)$, $\tilde{\omega} = \hat{\omega}$, donc sur $P_{\mathrm{SO}(n)}$,

$$\omega = \theta_* \cdot (\varphi^*)^{-1} \tilde{\omega} = \theta_* \cdot (\varphi^*)^{-1} \hat{\omega} = \theta_*(\theta_*^{-1} \cdot \omega_{LC} + \alpha\, \eta) = \omega_{LC} + \theta_*(\alpha\, \eta) \ ,$$

ce qui montre que *la restriction à $P_{SO(n)}$ de ω* est

$$\omega|_{P_{\mathrm{SO}(n)}} = \begin{pmatrix} \omega_{LC} & -\, 2\, \alpha\, \eta \\ 2\, \alpha\, \eta^t & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On remarque donc l'inexactitude dans [2], p. 6.

9. L'holonomie de $\bar{M}$

On revient maintenant à $\bar{M}$. Soit $\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ le "pull back" de $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ par la projection $\bar{M} \to M$. On considère aussi $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ — le fibré des repères orthonormés orientés sur $\bar{M}$. Comme $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$ est par définition (voir section précédente) formé des couples $[u, A]$, $u \in P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$, $A \in \mathrm{SO}(n+1)$, modulo la relation d'équivalence $[u, A] \sim [ua, a^{-1}A]$, $\forall\ a \in \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$, on voit que $\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) = \left\{ \Big([u, A], (x, r) \Big) \mid \pi(u) = x \right\}$, modulo la même action de $\mathrm{SO}(n)$.

En observant que, si $u \in P_{\mathrm{SO}(n)}$, alors $\left(\frac{1}{r}u, \frac{\partial}{\partial r} \right) \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$, on déduit facilement que l'application

$$\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$$

donnée par

$$\Big([u, A], (\pi(u), r) \Big) \longmapsto \left(\left(\frac{1}{r}u, \frac{\partial}{\partial r} \right) A \right)_{(\pi(u), r)}$$

est une équivalence de fibrés principaux, qui induit un isomorphisme de fibrés vectoriels riemanniens

$$p \ : \ T\bar{M} \ \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} \ \overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) \times_{\imath} \mathbb{R}^{n+1} \ ,$$

$\imath$ étant la représentation canonique de $\mathrm{SO}(n+1)$.

Soit $\overline{\varpi}$ la forme de connexion pour la connexion de Levi-Civitá de $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{M}})$. Notre prochain but est de calculer l'expression de $p^*\overline{\varpi}$. On choisit un repère orthonormé $\{X_1, \cdots, X_n\}$ dans $x \in M$, et on utilise la même notation pour le repère orthonormé au voisinage de x obtenu par transport parallèle le long des géodésiques par x, ainsi que pour l'extension naturelle à $\bar{M}$ de ces champs de vecteurs. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) & \stackrel{p}{\longrightarrow} & P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) \\ h \uparrow\downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \bar{M} & \stackrel{=}{\longrightarrow} & \bar{M} \end{array}$$

où

$$h(x, r) = \Big([(X_1, \cdots, X_n)_x, \mathrm{Id}_{n+1}], (x, r) \Big)$$

est une section locale de $\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ autour de x. On rappelle les formules pour les produits tordus de la section 2.

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0 \ ,$$

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} X = \overline{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} X \ ,$$
$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - r\, \langle X, Y\rangle_M \frac{\partial}{\partial r} \ ;$$

de ces formules, de la formule générale (60) (reliant la dérivée covariante avec la forme de connexion), et du fait que

$$p \circ h(x) = \left(X_1, \cdots, X_n, \frac{\partial}{\partial r} \right)_x \ ,$$

on tire

$$\begin{aligned} p^*\overline{\omega}\left(h_* \frac{\partial}{\partial r} \right) v &= \overline{\omega}\left((ph)_* \frac{\partial}{\partial r} \right) v = (ph)^{-1}[ph, \overline{\omega}\left((ph)_* \frac{\partial}{\partial r} \right) v] \\ &= (ph)^{-1}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} [ph, v]) \ ; \end{aligned}$$

donc, si $v = e_{n+1}$,

$$\begin{aligned} p^*\overline{\omega}\left(h_* \frac{\partial}{\partial r} \right) e_{n+1} &= (ph)^{-1}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} [ph, e_{n+1}]) = (ph)^{-1}\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

et si $v = e_k, \ k \leq n$,

$$\begin{aligned} p^*\overline{\omega}\left(h_* \frac{\partial}{\partial r} \right) e_k &= (ph)^{-1}(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} [ph, e_k]) = (ph)^{-1}\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{1}{r} X_k \right) \right) \\ &= (ph)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) X_k + \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} X_k \right) \\ &= 0 \ ; \end{aligned}$$

ça montre donc $p^*\overline{\omega}\left(h_* \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$.

Ensuite, pour calculer $p^*\overline{\omega}(h_* X)$, on utilise un autre diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) & \xrightarrow{g} & P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M) & \xleftarrow{\varphi} & P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M) \\ p \uparrow & \tilde{f} \nearrow & i \uparrow & & \\ \overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) & \xrightarrow{f_1} & P_{\mathrm{SO}(n)}(M) & & \\ h \uparrow\downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\ \bar{M} & \xrightarrow{f} & M & & \end{array}$$

Les fleches sont plus ou moins èvidentes, sauf peut-être g qui est défini de la manière suivante. Pour un repère $\bar{u} \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$, on choisit un élément $a \in \mathrm{SO}(n{+}1)$ tel que $\bar{u} = \bar{u}_0 a$, avec u_0 de la forme $(u, \frac{\partial}{\partial r})$, $u \in P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ et on définit $g(\bar{u}) = [ru, a] \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$. La définition ne dépend pas de a. Si on observe que $f_1 \circ h(x,r) = (X_1, \cdots, X_n)_x$ et si on note $a_k = \eta_k((f_1 h)_* X) = \langle X, X_k \rangle$, et $\Gamma^i_{X,k} X_i = \nabla_X X_k$, alors

$$\begin{aligned}
p^*\overline{\omega}(h_*X)\, e_{n+1} &= \overline{\omega}((ph)_*X)\, e_{n+1} = (ph)^{-1}\left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= (ph)^{-1}\left(\frac{1}{r} X\right) = \langle X, X_i \rangle\, e_i = \eta_i((f_1 h)_* X)\, e_i \\
&= \eta((f_1 h)_* X)\ ,
\end{aligned}$$

et, enfin

$$\begin{aligned}
p^*\overline{\omega}(h_*X)\, e_k &= (ph)^{-1}(\overline{\nabla}_X [ph, e_k]) = (ph)^{-1}\left(\nabla_X \left(\frac{1}{r} X_k\right) - r\, \langle X, \frac{1}{r} X_k \rangle \frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= \frac{1}{r}(ph)^{-1}(\nabla_X X_k) - (ph)^{-1}\left(a_k \frac{\partial}{\partial r}\right) = \Gamma^i_{X,k} e_i - a_k\, e_{n+1} \\
&= (f_1 h)^{-1}(\Gamma^i_{X,k} X_i) - \eta_k((f_1 h)_* X)\, e_{n+1} \\
&= \omega_{LC}((f_1 h)_* X)\, e_k - \eta_k((f_1 h)_* X)\, e_{n+1} \\
&= (f_1^* \omega_{LC})(h_* X)\, e_k - (f_1^* \eta)(h_* X)\, e_{n+1}\ .
\end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\begin{cases}
p^*\overline{\omega}\left(h_* \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0 \\
p^*\overline{\omega}(h_*X)\, e_{n+1} = (f_1^*\eta)(h_*X) \\
p^*\overline{\omega}(h_*X)\, e_k = (f_1^*\omega_{LC})(h_*X)\, e_k - (f_1^*\eta)(h_*X)\, e_{n+1} \quad , 1 \le k \le n.
\end{cases}$$

(On remarque une autre inadvertence dans [2], p.6, où on énonce ces formules avec $\overline{\omega}$ au lieu de $p^*\overline{\omega}$, et on omet f_1). On peut écrire ce système comme

$$p^*\overline{\omega} = f_1^* \begin{pmatrix} \omega_{LC} & \eta \\ -\eta^t & 0 \end{pmatrix}$$

sur tous les vecteurs de $\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ de la forme h_*X. Mais on a vu dans la section précédente que, si $\alpha = -\,\frac{1}{2}$, alors

$$i^*\omega = \begin{pmatrix} \omega_{LC} & \eta \\ -\eta^t & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\tilde{f}^*\omega = p^*\overline{\omega}$, sur tous les vecteurs de $\overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ de la forme h_*X. Comme ces deux formes sont toutes les deux $\mathrm{SO}(n+1)$-équivariantes et prennent les mêmes valeurs sur les fibres, on voit qu'elles doivent coï ncider. Mais $\tilde{f} = g \circ p$, et p est un difféomorphisme, donc du fait que $\tilde{f}^*\omega = p^*\overline{\omega}$, on obtient $g^*\omega = \overline{\omega}$, donc

Théorème 7. *Si $\alpha = -\,\frac{1}{2}$, alors la forme de connexion de $\tilde{\nabla}$, la forme ω et la forme de connexion de la connexion de Levi-Civitá de*

$\bar{M}$ sont reliées par

$$g^*\omega = \overline{\omega} \qquad , \qquad \varphi^*\omega = \theta_*\tilde{\omega}_{LC} \ . \tag{62}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, les mêmes formules sont vraies si on change l'orientation de $\bar{M}$.

Preuve. La première partie est évidente. Changer l'orientation de $\bar{M}$ revient à considérer au lieu de $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$, l'autre composante connexe de $P_{\mathrm{O}(n+1)}(\bar{M})$. Donc, si on remplace h par

$$h_-(x,r) = \Big([(X_1, \cdots, X_n)_x, \mathrm{J}_{n+1}], (x,r)\Big)$$

où $\mathrm{J}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, les mêmes raisonnements de tout à l'heure montrent les relations (62) pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

Q.E.D.

On choisit maintenant des points fixés $(x,r) \in \bar{M}$, $u \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$, $\tilde{u} \in P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ au-dessus de x, et $\overline{u} \in \overline{P}_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ au-dessus de (x,r), avec $g(\overline{u}) = u$, $\varphi(\tilde{u}) = u$. Considérons le groupe d'holonomie de $(\bar{M}, \overline{\omega})$ par $\overline{u}$, $\mathrm{Hol}(\bar{M}\ )$, et le groupe d'holonomie de $(P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M), \tilde{\omega}_{LC})$ par $\tilde{u}$, $\tilde{\mathrm{Hol}}(M)$. Le théorème 7 donne alors

Corollaire. Si M est simplement connexe et $\alpha = -\frac{1}{2}$, alors Hol($\bar{M}$) $= \tilde{\theta}(\tilde{\mathrm{Hol}}(M))$, et $\tilde{\mathrm{Hol}}(M)$ est la composante de l'identité de $\tilde{\theta}^{-1}(\mathrm{Hol}(\bar{M}))$. La même chose est vraie pour $\alpha = \frac{1}{2}$ si on change l'orientation de $\bar{M}$.

Preuve. Il suffit de montrer la première assertion. Si deux éléments u, v de la même fibre d'un fibré peuvent être joints par un chemin horizontal, on va écrire $u \sim v$. Les égalités ci-dessus montrent que l'image par g de tout chemin horizontal dans $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ est un chemin horizontal dans $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$, et l'image par $\tilde{\varphi}$ de tout chemin horizontal dans $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ est un chemin horizontal dans $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$. Réciproquement, le fait que M est simplement connexe implique que pour tout chemin horizontal γ dans $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M)$ ils existent des chemins horizontaux dans $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ et dans $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ qui se projettent sur γ. Donc, d'une part

$$\Big(\overline{a} \in \mathrm{Hol}_{\overline{u}}(\bar{M})\Big) \iff \Big(\overline{u} \sim \overline{ua}\Big) \iff \Big(g(\overline{u}) \sim g(\overline{ua}) = g(\overline{u})\overline{a}\Big)$$

et d'autre part,

$$\left(\tilde{a} \in \tilde{\mathrm{Hol}}(M)\right) \iff \left(\tilde{u} \sim \tilde{u}\tilde{a}\right) \iff \left(\tilde{\varphi}(\tilde{u}) \sim \tilde{\varphi}(\tilde{u}\tilde{a}) = \tilde{\varphi}(\tilde{u})\tilde{\theta}(\tilde{a})\right) ,$$

ce qui montre que $\left(\tilde{a} \in \tilde{\mathrm{Hol}}(M)\right) \iff \left(\tilde{\theta}(\tilde{a}) \in \mathrm{Hol}_{\overline{u}}(\bar{M})\right)$.

Q.E.D.

Remarque. Répondant en cela à une question de Paul Gauduchon, on va montrer (utilisant le théorème 7) que l'existence des spineurs de Killing sur M implique l'existence des spineurs parallèles sur $\bar{M}$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M}) & \xrightarrow{g} & P_{\mathrm{SO}(n+1)}(M) \\ \psi \uparrow & & \uparrow \tilde{\varphi} \\ \bar{P} & \xrightarrow{\pi} & P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{M} & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

où $\bar{P}$ est le pull-back de $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ par la projection π, et ψ est donné par

$$\left([u,a],r\right) \longmapsto \left(\frac{1}{r}\tilde{\varphi}(u), \frac{\partial}{\partial r}\right)\tilde{\theta}(a) .$$

On vérifie sans difficulté que ψ est bien défini, et qu'il représente une structure spinorielle au-dessus de $\bar{M}$. La connexion induite de $\tilde{\omega}$ sur $\bar{P}$ coï ncide avec la connexion induite par la connexion de Levi-Civitá de $\bar{M}$, car si on utilise le théorème 7 et le diagramme commutatif ci-dessus, on peut écrire

$$\pi^*\tilde{\omega} = \pi^* \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{\theta}_*^{-1}\omega) = \psi^* \circ g^*(\tilde{\theta}_*^{-1}\omega) = \psi^*(\tilde{\theta}_*^{-1}\overline{\omega}) .$$

On a donc obtenu le fait que le fibré spinoriel (resp. un des fibrés semi-spinoriels, pour n impair) sur $\bar{M}$ est le pull-back de ΣM par la projection π, et, ce qui est le plus important, la connection induite par π coï ncide avec la connexion induite par la connexion de Levi-Civitá de $\bar{M}$. Cela montre que tout spineur de Killing de constante $\pm\frac{1}{2}$ sur M induit par l'application $\Psi \mapsto (\Psi, r)$ un champ spinoriel parallel sur $\bar{M}$, pour n pair, et un semi-spineur parallel pour n impair. La différence provient du fait que les représentations spinorielles de $\mathrm{Spin}(n)$ et $\mathrm{Spin}(n+1)$ ont la même dimension pour n pair, tandis que pour n impair, une des dimensions est deux fois plus grande que l'autre.

10. La géométrie de $\bar{M}$

Les deux résultats qui suivent sont bien traités dans [2], donc on va pas reprendre leurs démonstrations.

Lemme 3. Une géodésique dans $\bar{M}$ est soit de la forme $\{x\}\times\mathbb{R}^+$, $x\in M$, soit complète, et dans ce dernier cas, r est une fonction concave le long de la géodésique.

Q.E.D.

Lemme 4. Si $\mathrm{Hol}_{\overline{u}}(\bar{M})$ *est réductible, alors $\bar{M}$ est plat, et M est isométrique à la sphère S^n.*

En utilisant les relations ([10], p. 210) reliant les tenseurs de courbure de M et $\bar{M}$,

$$\overline{R}\left(X,\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r}=\overline{R}(X,Y)\frac{\partial}{\partial r}=\overline{R}\left(X,\frac{\partial}{\partial r}\right)Y=0 \tag{63}$$

et

$$\overline{R}(X,Y)Z=R(X,Y)Z+\langle X,Z\rangle_M\cdot Y-\langle Y,Z\rangle_M\cdot X\ , \tag{64}$$

on voit que la deuxième assertion du lemme est impliquée par la première.

Q.E.D.

11. Chiralité

Soit M une variété riemannienne spinorielle compacte, connexe et simplement connexe, qui admet un spineur de Killing réel de constante $\alpha\neq 0$. Si on considère une nouvelle métrique sur M, $\tilde{g}=\frac{1}{\beta^2}\,g$, $\beta>0$, on obtient une variété $\tilde{M}$, avec un fibré de repères orthonormés orientés $P_{\mathrm{SO}(n)}(\tilde{M})$, qui induit un fibré de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(\tilde{M})$. Du fait que $P_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ est isomorphe à $P_{\mathrm{SO}(n)}(\tilde{M})$ par $u\mapsto\tilde{u}=\beta\,u$, on voit qu'il existe un isomorphisme de fibrés en algèbres de Clifford $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(M)\to\mathbb{C}\mathrm{l}_n(\tilde{M})$ donné par $[u,a]\mapsto[\tilde{u},a]=\beta\,[u,a]$, et un isomorphisme des fibrés spinoriels $P_{\mathrm{Spin}(n)}(M)\to P_{\mathrm{Spin}(n)}(\tilde{M})$ donné par $\Psi\mapsto\tilde{\Psi}=\beta\,\Psi$. La structure de module de $P_{\mathrm{Spin}(n)}(\tilde{M})$ sur $\mathbb{C}\mathrm{l}_n(\tilde{M})$ est $\tilde{A}\cdot\tilde{\Psi}=A\,\tilde{\cdot}\,\Psi$. Alors, comme la connexion de Levi-Civitá de $\tilde{g}$ coï ncide avec celle de g, on trouve

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{\Psi}&=\beta^2\,\nabla_X\Psi=\beta^2\,\alpha\,X\cdot\Psi=\beta\,\alpha\,X\,\tilde{\cdot}\,\Psi\\&=\beta\,\alpha\,\tilde{X}\cdot\tilde{\Psi}\ .\end{aligned}$$

Ceci montre que, modulo une renormalisation de la métrique, on peut toujours supposer $\alpha=\pm\frac{1}{2}$. Les spineurs de Killing étant des sections parallèles de $P_{\mathrm{Spin}(n+1)}(M)$ par rapport à $\tilde{\nabla}$, ils correspondent aux points fixes de la représentation de $\tilde{\mathrm{Hol}}(M)$ sur ΣM obtenue par restriction de la représentation spinorielle ρ_n. Pour n pair ρ_n est uniquement définie, mais pour n impair, on a en fait deux représentations "semi-spinorielles" équivalentes, et ρ_n est une d'entre elles.

Lemme 5. Pour n pair, la dimension de l'espace des spineurs de Killing avec $\alpha = \frac{1}{2}$ est égale à celle de l'espace des spineurs de Killing avec $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Preuve. Une façon de montrer cela est d'observer que, dans les considérations du début de la section, on devrait choisir $\beta > 0$, seulement pour que l'application $P_{\mathrm{SO}(n)}(M) \to P_{\mathrm{SO}(n)}(\tilde{M})$ donnée par $u \mapsto \tilde{u} = \beta u$ soit définie, mais, si n est pair, elle est définie même pour $\beta < 0$. Donc si on fait exactement le même raisonnement pour $\beta = -1$, on obtient une correspondance bijective entre les spineurs de Killing de (M, g) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et les spineurs de Killing de $(M, \tilde{g})$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, et il reste à observer que $\tilde{g} = g$, i.e. $(M, g) = (M, \tilde{g})$.

Q.E.D.

Remarque. Une autre manière de montrer ce lemme est la suivante. On introduit l'élément de volume complexe $\omega_{\mathbb{C}} = i^n e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$ dans Cl_n, et on utilise la même notation pour la section de $\mathrm{Cl}_n(M)$ induite. Du fait que $\mathrm{Cl}_n(M)$ est canoniquement isomorphe au complexifié de $\Lambda(M)$ (en tant que fibrés vectoriels), on voit que ω_{LC} induit une connexion sur $\mathrm{Cl}_n(M)$, qu'on va aussi appeler la connexion de Levi-Civitá. Si on désigne par ∇ sa dérivée covariante, ainsi que celle de la connexion sur ΣM, alors

$$\nabla(A \cdot \Phi) = (\nabla A) \cdot \Phi + A \cdot (\nabla \Phi)$$

pour tout $A \in \Gamma(\mathrm{Cl}_n(M))$, $\Phi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Par l'isomorphisme canonique ci-dessus, $\omega_{\mathbb{C}}$ correspond à la forme de volume sur M, qui est parallèle, ce qui montre que $\omega_{\mathbb{C}}$ est une section parallèle. Par conséquent, si on décompose

$$\Sigma M = \Sigma_- M \oplus \Sigma_+ M \ , \ \Sigma_\pm M = (\frac{1 \pm \omega_{\mathbb{C}}}{2}) \cdot \Sigma M \ ,$$

la connexion sur ΣM induit des connexions sur $\Sigma_\pm M$. Les spineurs contenus dans $\Sigma_+ M$ (resp. $\Sigma_- M$) s'appellent des spineurs chiraux de chiralité positive (resp. négative).

Maintenant il faut observer que, pour n pair, les spineurs de Killing ne sont jamais des spineurs chiraux, à cause du fait que la multiplication par un vecteur change la chiralité d'un spineur

$$X \cdot (1 + \omega_{\mathbb{C}}) \cdot \Phi = (1 - \omega_{\mathbb{C}}) \cdot X \cdot \Phi \ ,$$

et la dérivée covariante la préserve. Après ces préparatifs, soit Φ un champ spinoriel, et $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$ sa décomposition correspondant à celle de ΣM. On voit tout de suite que Φ est un spineur de Killing si et seulement si

$$\nabla_X \Phi_+ = \alpha\, X \cdot \Phi_- \qquad \text{et} \qquad \nabla_X \Phi_- = \alpha\, X \cdot \Phi_+$$

donc une correspondance bijective entre les spineurs de Killing de constante $\frac{1}{2}$ et ceux de constante $-\frac{1}{2}$ est réalisée par

$$\Phi_+ + \Phi_- \longmapsto \Phi_+ - \Phi_- \ .$$

Considérons maintenant le cas n impair, où la situation est complètement différente. Du fait que cette fois-ci l'élément de volume de $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ est central, la représentation irréductible de $\mathbb{C}\mathrm{l}_n$ se décompose en deux représentations irréductibles (non-équivalentes, car $\omega_{\mathbb{C}} = Id$ sur une et $-Id$ sur l'autre), donc la multiplication de Clifford préserve la décomposition de ΣM.

On veut voir ce qui se passe quand on change l'orientation de $\bar{M}$. Si on note $-\bar{M}$ la variété riemannienne obtenue de $\bar{M}$ par le changement d'orientation, on applique mot-à-mot (en remplaçant $\tilde{M}$ par $-\bar{M}$) les raisonnements du début de la section, avec $\beta = -\ 1$, et on voit que si Φ est un spineur de Killing de constante $\frac{1}{2}$, alors $\tilde{\Phi}$ est un spineur de Killing de constante $-\frac{1}{2}$, et vice versa. Mais quelle est la relation entre $\mathrm{Hol}(\bar{M}\ )$ et $\mathrm{Hol}(-\bar{M}\ )$? Si on note $a = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+1)$, alors $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ et $P_{\mathrm{SO}(n+1)}(-\bar{M})$ sont les deux composantes connexes de $P_{\mathrm{O}(n+1)}(\bar{M})$, et le passage de l'une à l'autre se fait par multiplication à droite par a. Si $u \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(\bar{M})$ et $\tilde{u} = ua \in P_{\mathrm{SO}(n+1)}(-\bar{M})$, on obtient

$$\Big(b \in \mathrm{Hol}_u(\bar{M})\Big) \iff \Big(u \sim ub\Big) \iff \Big(ua \sim uba\Big) \iff$$

$$\iff \Big(ua \sim ua(a^{-1}ba)\Big) \iff \Big(a^{-1}ba \in \mathrm{Hol}_{\tilde{u}}(-\bar{M})\Big)\ .$$

Donc $\mathrm{Hol}(\bar{M}\ )$ et $\mathrm{Hol}(-\bar{M}\ )$ sont conjugués par a. Finalement, on va traduire cela en termes de $\tilde{\mathrm{Hol}}(M)$. L'égalité évidente

$$\theta(e_{n+1} \cdot x \cdot e_{n+1}^{-1}) = a \circ \theta x \circ a^{-1} \quad \forall x \in \mathrm{Spin}(n+1)\ ,$$

montre que changer l'orientation de $\bar{M}$ signifie conjuguer $\tilde{\mathrm{Hol}}(M)$ par e_{n+1}. Mais du fait que $e_{n+1} \cdot \omega'_{\mathbb{C}} \cdot e_{n+1}^{-1} = -\ \omega'_{\mathbb{C}}$ (où $\omega'_{\mathbb{C}}$ est l'élément de volume complexe sur $\mathbb{C}\mathrm{l}_{n+1}$), on voit que la conjugaison par e_{n+1} signifie changer la représentation semi-spinorielle.

12. Les théorèmes de classification

On va maintenant appliquer le théorème de Berger-Simons pour voir quels sont les sous-groupes de $\mathrm{SO}(n+1)$ qui peuvent apparaî tre comme groupes d'holonomie de $\bar{M}$. D'abord une notation.

Définition 8. *Une variété riemannienne spinorielle M s'appelle de type (p, q) si l'espace vectoriel des spineurs de Killing de constante $\alpha = \frac{1}{2}$ est de dimension p et l'espace vectoriel des spineurs de Killing de constante $\alpha = -\frac{1}{2}$ est de dimension q, ou vice versa.*

Par exemple, la sphère standard S^n est de type $(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$ car la formule (64) montre que le cône sur S^n est une variété riemannienne plate, donc $\tilde{\mathrm{Hol}}(\mathrm{S}^n)$ est triviale, i.e. tout élément de Σ_n induit un spineur de Killing.

Utilisant la proposition 1 et la formule (64) on voit que $\bar{M}$ est Ricci-plat, donc le lemme 4, le théorème de Berger-Simons et la proposition de [11], p.59 (cf. aussi le chapitre 10 de [3]) montrent le résultat suivant.

Théorème 8. *Si M est une variété riemannienne spinorielle simplement connexe complète n-dimensionelle, admettant un spineur de Killing avec la con- stante $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$, les seules représentations d'holonomie possibles pour $\bar{M}$ sont*

$n =$ dimension de M	$\mathrm{Hol}(\overline{M})$	type
n arbitraire	trivial	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$
$n+1 = 4m+2$	$\mathrm{SU}(2m+1)$	$(1,1)$
$n+1 = 4m$	$\mathrm{SU}(2m)$	$(2,0)$
$n+1 = 4m$	$\mathrm{Sp}(m)$	$(m+1,0)$
$n+1 = 8$	$\mathrm{Spin}(7)$	$(1,0)$
$n+1 = 7$	G_2	$(1,1)$

On peut maintenant énoncer les théorèmes de classification.

Théorème 9. *Soit M une variété riemannienne spinorielle complète de dimension n, admettant un spineur de Killing de constante $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. Si n est pair, $n \neq 6$, alors M est isométrique à la sphère standard.*

Preuve. Si M admet un spineur de Killing, alors son revêtement universel $\tilde{M}$ a la même propriété, donc la proposition 1 et le théorème de Meyers montrent que $\tilde{M}$ est compacte. Du théorème 8 ci-dessus et de la formule (64), on voit que $\tilde{M}$ est isométrique à S^n. Mais, du fait que n est pair, $\chi(\mathrm{S}^n) = 2$, donc les seuls quotients de S^n sont les espaces projectifs réels, qui sont non-orientables. Donc $M = \tilde{M} = \mathrm{S}^n$.

Q.E.D.

Théorème 10. Soit M une variété riemannienne spinorielle simplement connexe complète de dimension 6, admettant un spineur de Killing avec la constante $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. On a alors deux possibilités

$(i) M = S^6$;

$(ii) M$ est de type $(1,1)$ et presque kählérienne de type constant 1. Réciproquement, si $M \neq S^6$ est une variété riemannienne complète simplement connexe qui est presque kählérienne, mais non-kählérienne, alors M est de type $(1,1)$.

Preuve. L'implication directe résulte des théorèmes 4 et 8. Pour l'autre implication on utilise les mêmes théorèmes après avoir renormalisé la métrique de M pour que J soit de type constant 1 (prop. 2).

Q.E.D.

Théorème 11. Soit $n = 4k+1$, $k \geq 1$ et M une variété riemannienne spinorielle simplement connexe complète n-dimensionelle, admettant un spineur de Killing de constante $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -\frac{1}{2}$. On a alors deux possibilités

$(i) M = S^n$;

$(ii) M$ est de type $(1,1)$ et M est une variété d'Einstein-Sasaki. Réciproquement, si une variété riemannienne spinorielle complète simplement connexe M est d'Einstein-Sasaki et de dimension comme ci-dessus, alors M admet des spineurs de Killing pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Preuve. Le théorème 8 montre que si $M \neq \mathrm{S}^n$, alors l'holonomie de $\bar{M}$ est réduite à $\mathrm{SU}(2m+1)$ et M est de type $(1,1)$. L'implication directe résulte donc du théorème 1. Réciproquement, si M est une variété d'Einstein-Sasaki, alors $\bar{M}$ est kählérienne, par le théorème 1, donc son groupe d'holonomie est réduit à $\mathrm{U}(2m+1)$. En plus, si X est le champ de vecteurs de Killing de la définition d'une variété de Sasaki, le c) de la définition 2 montre que

$$\nabla_V \nabla_W X - \nabla_{\nabla_V W} X = \langle V, W\rangle X - \langle X, W\rangle V \ ,$$

donc $R_{V,W}X = \langle X, V\rangle W - \langle X, W\rangle V \Rightarrow R(V,W,X,Y) = \langle X, V\rangle \cdot \langle W, Y\rangle - \langle X, W\rangle \cdot \langle V, Y\rangle$. Si on fait $V = X$, $W = Y = e_i$ et on somme sur i, on obtient $Ric(X,X) = n-1$. Mais M est un espace d'Einstein donc sa courbure de Ricci doit être $n-1$. La formule (64) montre alors que $\bar{M}$ est Ricci-plat, donc son holonomie est réduite à $\mathrm{SU}(2m+1)$, et il ne reste qu'à appliquer le théorème 8.

Q.E.D.

Théorème 12. Soit $n = 4k-1$, $k \geq 3$ *et* M *une variété riemannienne spinorielle simplement connexe complète n-dimensionelle, admettant un spineur de Killing de constante* $\alpha = \frac{1}{2}$ *ou* $\alpha = -\frac{1}{2}$. *On a alors trois possibilités*

$(i) M = S^n$;

$(ii) M$ *est de type* $(2,0)$ *et il est une variété de Einstein-Sasaki qui n'admet pas une 3-structure de Sasaki;*

$(iii) M$ *est de type* $(m+1,0)$ *et admet une 3-structure de Sasaki.* *Réciproquement, si* $M \neq S^n$ *est une variété riemannienne spinorielle complète simplement connexe qui admet une 3-structure de Sasaki, alors* M *est de type* $(m+1,0)$. *Si* M *est une variété riemannienne spinorielle complète simplement connexe d'Einstein-Sasaki qui n'admet pas une 3-structure de Sasaki, alors* M *est de type* $(2,0)$.

Preuve. L'implication directe est une conséquence immédiate des théorèmes 1, 2 et 8, si on tient compte du fait qu'une variété de dimension $4k$ est hyperkählérienne si et seulement si son holonomie est incluse dans $\mathrm{Sp}(k)$. La réciproque résulte des mêmes théorèmes, si on utilise le fait que toute variété qui admet une 3-structure de Sasaki est un espace d'Einstein avec $Ric = n-1$.

Q.E.D.

Il nous reste encore à considérer le cas $n = 7$.

Théorème 13. Soit M *une variété riemannienne spinorielle simplement connexe complète de dimension 7, admettant un spineur de Killing avec la constante* $\alpha = \frac{1}{2}$ *ou* $\alpha = -\frac{1}{2}$. *On a alors quatre possibilités*

(i) $M = S^n$;

(ii) M *est de type* $(1,0)$ *et admet une 3-forme distinguée* φ *avec* $\nabla\varphi = *\varphi$, *mais n'admet pas une structure de Sasaki;*

(iii) M *est de type* $(2,0)$ *et est une variété d'Einstein-Sasaki qui n'admet pas une 3-structure de Sasaki;*

(iv) M *est de type* $(m+1,0)$ *et il admet une 3-structure de Sasaki.* *Réciproquement, si* $M \neq S^7$ *est une variété riemannienne spinorielle complète simplement connexe 7-dimensionelle qui admet une 3-structure de Sasaki, alors* M *est de type* $(3,0)$. *Si* M *est une variété d'Einstein-Sasaki qui n'admet pas une 3-structure de Sasaki, alors* M *est de type*

$(2,0)$. *Si M admet une 3-forme distinguée φ avec $\nabla\varphi = *\varphi$, mais n'admet pas une structure de Sasaki, alors M est de type* $(1,0)$.

Preuve. On applique tout simplement les théorèmes 1, 2, 6 et 8 et le fait que, par le théorème 5, une variété de dimension 8 admet une 4-forme distinguée parallèle si et seulement si son holonomie est incluse dans Spin(7).

Q.E.D.

Références

[1] H. BAUM, T. FRIEDRICH, R. GRUNEWALD, I. KATH, *Twistor and Killing spinors on Riemannian manifolds,* Seminarbericht **108**, Humboldt-Universität Berlin 1990.

[2] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy*, à paraître.

[3] A. L. BESSE, *Einstein manifolds,* Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.

[4] R. L. BRYANT, *Metrics with exceptional holonomy,* Ann. Math. **126** (1987), 526-576.

[5] M. J. DUFF, B. E. W. NILSSON, C. N. POPE, *Kaluza-Klein supergravity,* Phys. Rep. **130** (1986), 1-142.

[6] A. GRAY, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3,* J. Differential Geom. **7** (1972), 343-369.

[7] A. GRAY, *The structure of nearly Kähler manifolds,* Math. Ann. **223** (1976), 233-248.

[8] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *The foundations of differential geometry,* (vol. I, II), Interscience Publishers, New York, 1963, 1969.

[9] B. LAWSON, M.-L. MICHELSON, *Spin geometry,* Princeton University Press 1989.

[10] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian geometry,* Acad. Press, New York, 1983.

[11] M. WANG, *Parallel spinors and parallel forms,* Ann Global Anal. Geom. **7** (1989), 59-68.