

VARIÉTÉS À HOLONOMIES SPÉCIALES EN PETITES DIMENSIONS

Andrei Moroianu

CNRS – Ecole Polytechnique

16 novembre 2006

Variétés différentiables

Sur une variété différentiable M on peut considérer différents objets :

- fonctions $\rightsquigarrow \mathcal{C}^\infty(M)$
- champs de vecteurs $\rightsquigarrow \mathcal{X}(M)$
- champs de tenseurs (formes extérieures, formes bilinéaires, etc.) $\rightsquigarrow \mathcal{T}(M)$

Connexions

Pour dériver ces objets par rapport aux vecteurs \rightsquigarrow **dérivée covariante** (ou **connexion**) :

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

- \mathbb{R} -bilinéaire ;
- $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire dans le premier argument (tensorialité) ;
- satisfaisant la relation de Leibniz par rapport au deuxième argument.

L'espace des connexions est un espace affine modelé sur l'espace des sections de $T^*M \otimes \text{End}(M)$.

Toute connexion s'étend naturellement aux champs de tenseurs, en tant que dérivation qui commute avec les contractions. **Exemple** :

Connexions

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X \omega)(Y) &= C(\nabla_X \omega \otimes Y) \\
 &= C(\nabla_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes \nabla_X Y) \\
 &= \nabla_X(C(\omega \otimes Y)) - \omega(\nabla_X Y) \\
 &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).
 \end{aligned}$$

L'expression

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

est tensorielle en X et $Y \rightsquigarrow$ **torsion** de ∇ .

Un champ de tenseurs K est **parallèle** sur M si $\nabla_X K = 0$ pour tout X . K est parallèle le long d'un chemin γ si $\nabla_{\dot{\gamma}} K = 0$.

Transport parallèle, holonomie

Transport parallèle : si $K_0 \in \mathcal{T}_x(M)$ et $\gamma(0) = x$, il existe un unique champ de tenseurs K (défini) et parallèle le long de γ avec $K_x = K_0$ (Cauchy-Lipschitz).

Tout lacet (\mathcal{C}^∞ par morceaux) en $x \in M$ définit ainsi un isomorphisme de $T_x M$.

L'ensemble de ces isomorphismes \rightsquigarrow **groupe d'holonomie**
 $\text{Hol}_x M \subset \text{Gl}(T_x M)$.

Si M connexe \rightsquigarrow classe de conjugaison d'un sous-groupe de Gl_n .

Transport parallèle, holonomie

Le défaut de commutation des dérivées secondes \rightsquigarrow **courbure**.

La courbure de ∇ vue comme 2-forme à valeurs dans les endomorphismes :

$$R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

satisfait $R^\nabla(X, Y) \in \mathfrak{hol}_x M$.

Remarque. $\text{Hol}(M) = \{1\} \iff$ il existe un repère global parallèle.

Variétés riemanniennes

Une **métrique riemannienne** sur une variété M est un champ de tenseurs g symétrique et défini positif en chaque point. A l'aide de g on identifie souvent vecteurs et 1-formes sur les variétés riemanniennes.

Connexion de Levi-Civita : l'unique connexion sur (M, g)

- métrique $\rightsquigarrow \nabla g = 0$
 $\rightsquigarrow X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- sans torsion $\rightsquigarrow T^\nabla = 0 \rightsquigarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Exemples. $(\mathbb{R}^n, eucl)$, $(N, h) \subset (M, g)$.

Variétés riemanniennes

L'holonomie de (M, g) est un sous-groupe de O_n (SO_n si M orientable) \rightsquigarrow la courbure $R(X, Y)$ anti-symétrique $\forall X, Y$.

Le tenseur riemannien de courbure totalement covariant $R(X, Y, Z, T) := g(R(X, Y)Z, T)$ satisfait les identités

- $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$;
- $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$;
- $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$
(première identité de Bianchi) ;
- $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$
(deuxième identité de Bianchi).

Courbure riemannienne

Le **tenseur de Ricci** :

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(V \mapsto R(V, X)Y) = \sum R(e_i, X, Y, e_i)$$

est symétrique ; sa trace s'appelle la **courbure scalaire**. Une variété dont le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique s'appelle **d'Einstein**.

Le tenseur de courbure est l'obstruction à l'existence de coordonnées euclidiennes sur M : Si $R = 0 \rightsquigarrow \text{Hol}(M, g) = \{1\} \rightsquigarrow \exists$ repère parallèle $\rightsquigarrow M$ est localement isométrique à \mathbb{R}^n .

$$\text{Hol}(M \times N) = \text{Hol}(M) \times \text{Hol}(N)$$

Corollaire. L'holonomie d'un produit riemannien agit **réductiblement** sur le fibré tangent.

Théorème de Berger-Simons

Théorème. (décomposition de de Rham) Si $\text{Hol}(M)$ réductible, M est localement un produit riemannien.

Espaces (localement) symétriques : Variétés riemanniennes (M, g) dont les symétries géodésiques sont des isométries.



$M = G/H$, G : groupe de Lie, $H = G^\sigma$: l'ensemble des points fixes d'une involution σ de G , métrique induite par une forme bilinéaire symétrique $ad(H)$ -invariante sur $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.



Variétés riemanniennes (M, g) à tenseur de courbure parallèle.

Théorème de Berger-Simons

Théorème. (Berger, Simons) Une variété riemannienne simplement connexe irréductible est symétrique, ou bien son groupe d'holonomie est l'un des groupes suivants :

- SO_n ,
- U_m, SU_m ($n = 2m$),
- $Sp_k, Sp_k Sp_1$ ($n = 4k$),
- G_2 ($n = 7$), $Spin_7$ ($n = 8$).

Rappel. G_2 est le stabilisateur dans $GL_7(\mathbb{R})$ de

$$\omega = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} + e^{356} \in \Lambda^3 \mathbb{R}^7.$$

Remarque. Point fixe dans une représentation du groupe d'holonomie \iff tenseur parallèle.

Variétés kähleriennes

Définition. (M^{2m}, g) s'appelle **kählerienne** s'il existe structure presque complexe unitaire parallèle J . Comme

$$U_m = SO_{2m} \cap GL_m(\mathbb{C}) \rightsquigarrow \text{Hol}(M) \subset U_m \iff M \text{ kählerienne.}$$

Soit (M^{2m}, g, J) kählerienne $\rightsquigarrow R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y)$
 $\rightsquigarrow \text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(JX, JY) \rightsquigarrow$ **forme de Ricci**
 $\rho(X, Y) := \text{Ric}(X, JY).$

$\rho(X, Y) = \text{itr}^{\mathbb{C}} R(X, Y) \rightsquigarrow \rho = 0 \iff \text{Hol}(M) \subset SU_m :$
 variétés de **Calabi-Yau**.

Théorème. (Calabi, Yau) Si (M, J) est une variété complexe compacte à $c_1 = 0$, alors dans chaque classe de Kähler il existe une unique métrique de Calabi-Yau. **Exemple :** les surfaces K3, les hypersurfaces de degré $m + 1$ dans $\mathbb{C}P^m$, etc.

Variétés quaternion-Kähler

$I, J, K \in SO_{4k}$ définis par la multiplication à gauche par i, j, k sur $\mathbb{H}^k \simeq \mathbb{R}^{4k}$. $Sp_1 = \langle I, J, K \rangle$, $Sp_k =$ son centralisateur dans SO_{4k} .

La représentation adjointe de $Sp_k Sp_1 \simeq Sp_k \times Sp_1 / \{\pm 1\}$ sur $\text{End}(\mathbb{R}^{4k})$ n'a pas de point fixe, mais est néanmoins réductible : elle laisse invariant l'espace engendré par I, J, K .

Définition. (M, g) **quaternion Kähler** si $\text{Hol}(M) \subset Sp_k Sp_1$. D'après ce qui précède, il existe un sous-fibré parallèle de rang 3 de $\text{End}(TM)$. Son fibré unitaire : **l'espace de twisteurs** \mathcal{Z} .

La connexion de Levi-Civita de M induit une distribution "horizontale", complémentaire en chaque point aux fibres S^2 de $\mathcal{Z} \rightarrow M \rightsquigarrow$ famille de métriques riemanniennes g_t et 2 structures presque complexes, $\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-$ sur \mathcal{Z} .

Variétés quaternion-Kähler

Théorème. (Salamon, Bérard Bergery) La variété $(\mathcal{Z}, g_{\frac{1}{2}}, \mathcal{J}^+)$ est Kähler-Einstein et possède une structure de contact holomorphe.

Théorème. (LeBrun, M.-Simmelmann) Toute variété Kähler-Einstein de contact est l'espace de twisteurs d'une variété quaternion-Kähler.

La structure presque complexe \mathcal{J}^- n'est jamais intégrable. On a toutefois :

Théorème. (Nagy, Reyes-Carrión) $(\mathcal{Z}, g_1, \mathcal{J}^-)$ est nearly Kähler, d'Einstein et la distribution verticale est parallèle pour la connexion hermitienne (voir ci-dessous).

Structures presque hermitiennes

Structure presque hermitienne :

- métrique riemannienne g
- structure presque complexe J
- compatibilité : $g(JX, Y) = -g(X, JY)$.

La **forme de Kähler** (ou fondamentale) :

$$\Omega(X, Y) := g(JX, Y)$$

est une 2-forme non-dégénérée : $\Omega^m = m! \text{vol}_g$.

Structures presque hermitiennes

Tenseur de Nijenhuis :

$$\begin{aligned} N^J(X, Y) &:= \frac{1}{4}([X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]) \\ &= [X^{(0,1)}, Y^{(0,1)}]^{(1,0)}. \end{aligned}$$

N^J : obstruction à l'existence de coordonnées holomorphes (théorème de Newlander–Nirenberg).

- $N^J = 0 \rightsquigarrow$ **géométrie complexe** (hermitienne).
- $d\Omega = 0 \rightsquigarrow$ **géométrie symplectique** (presque kählerienne).
- $N^J = 0$ et $d\Omega = 0 \Rightarrow \nabla J = 0$: **géométrie kählerienne**.

Réciproquement, $\nabla J = 0 \Rightarrow N^J = 0$ et $d\Omega = 0$ car ∇J détermine entièrement $N^J = 0$ et $d\Omega = 0$.

Classification de Gray-Hervella

Théorème. (Gray-Hervella) Sous l'action de U_m ($m \geq 3$), on a les décompositions suivantes :

- $\nabla J = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_2 + (\nabla J)_3 + (\nabla J)_4$
- $N^J = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_2$
- $d\Omega = (\nabla J)_1 + (\nabla J)_3 + (\nabla J)_4$

Remarque. $(\nabla J)_1 = d\Omega^{(3,0)+(0,3)}$, $(\nabla J)_3 = d\Omega_0^{(2,1)+(1,2)}$, $(\nabla J)_4 = \Omega \lrcorner d\Omega$. Les trois premières composantes de ∇J sont invariantes aux changements conformes de la métrique.

Classification de Gray–Hervella

Pour un ensemble d'indices $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$, une structure s'appelle de type W_I si les composantes $(\nabla J)_j$ sont nulles quel que soit j dans le complémentaire de I .

Exemples :

- type W_2 : structure symplectique
- type $W_{3,4}$: structure hermitienne (complexe)
- type W_1 : **Nearly Kähler**, en particulier ni intégrable, ni symplectique.

Connexions hermitiennes

Définition. Une connexion ∇ sur une variété presque hermitienne (M, g, J) s'appelle **hermitienne** si $\nabla g = 0$ et $\nabla J = 0$.

L'espace des connexions hermitiennes est un espace affine modelé sur l'espace des sections de $T^*M \otimes \Lambda^{1,1}M$.

La projection orthogonale de la connexion de Levi-Civita sur cet espace \rightsquigarrow **connexion hermitienne canonique** $\bar{\nabla}$:

$$\bar{\nabla}_X Y := \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J) Y.$$

Variétés nearly Kähler

Définition. Une variété presque hermitienne (M, g, J) est **nearly Kähler** (ou NK) si $(\nabla_X J)X = 0, \forall X \in TM$. M s'appelle **strictement nearly Kähler** (SNK) si $\nabla_X J \neq 0, \forall X \in TM$.

Propriétés :

- ∇J (qui s'identifie à N^J , à $d\Omega$ et à la torsion de $\bar{\nabla}$) est **parallèle** par rapport à $\bar{\nabla}$.
- en dimension 4 : NK = Kähler
- en dimension 6 : une variété SNK :
 - admet une structure $SU_3 : (g, J, d\Omega), \bar{\nabla}$ -parallèle.
 - admet des spineurs de Killing \rightsquigarrow d'Einstein.

Variétés nearly Kähler

Theorème. Une variété presque hermitienne (M^6, g, J) est SNK si et seulement si le cône riemannien $\bar{M} := (M \times \mathbb{R}_+, t^2g + dt^2)$ satisfait $\text{Hol}(\bar{M}) \subset G_2$.

Idée de la démonstration : définir une 3-forme **générique** (au sens de Hitchin) :

$$\omega := t^2 dt \wedge \Omega + \frac{1}{3} t^3 d\Omega$$

et vérifier que ω est parallèle $\iff (M^6, g, J)$ est NK.

Corollaire. La sphère ronde (S^6, can) est SNK, par rapport à la structure presque complexe induite par

$$\omega = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} + e^{356}.$$

Exemples de variétés NK

- Les variétés **kähleriennes**.
- Les **espaces de twisteurs** des variétés QK à $Scal > 0$, avec la structure presque complexe non-intégrable \mathcal{J}^- .
- Les **espaces 3-symétriques** naturellement réductifs : Espaces homogènes G/H , avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, où H est l'ensemble des points fixes d'un automorphisme σ de G d'ordre 3 qui définit une structure complexe sur \mathfrak{m} par la relation

$$\sigma_* = -\frac{1}{2}Id + \frac{\sqrt{3}}{2}J; \text{ Exemple : } G \times G \times G/G, \text{ en particulier } S^3 \times S^3.$$

- **En dimension 6 :**
 - S^6
 - $\mathbb{C}P^3, F(1,2)$
 - $S^3 \times S^3$

Connexion canonique d'une G-structure

Soit (M^n, g) une variété riemannienne orientée et $G \subset SO_n$ compact. Une **G-structure** sur $M \rightsquigarrow$ réduction du fibré des repères orthonormés à G . Si G est le stabilisateur d'un élément d'une certaine représentation de SO_n , G-structure \iff section du fibré vectoriel associé. **Exemple** : $G = U_m \subset SO_{2m}$.

La connexion de Levi-Civita n'est pas toujours une G-connexion. Sa projection sur l'espace des G-connexions : **connexion canonique**.

Cleyton et Swann ont étudié le cas des G-structures **spéciales**, c'est à dire satisfaisant :

- L'holonomie de la connexion canonique $\bar{\nabla}$ agit irréductiblement sur \mathbb{R}^n .
- La torsion de $\bar{\nabla}$ est totalement antisymétrique et $\bar{\nabla}$ -parallèle.

Théorème de Cleyton et Swann

Rappel. Variétés riemanniennes à holonomie irréductible :

- variétés à holonomie $U_m, SU_m, Sp_k, Sp_k Sp_1, G_2, Spin_7$
- espaces symétriques à isotropie irréductible

Theorème. (Cleyton, Swann) Les G-structures spéciales sont :

- soit des variétés à **holonomie faible** SU_3 et G_2
- soit des espaces homogènes à isotropie irréductible

Décomposition des variétés NK

Une variété NK est une U_m -structure qui satisfait automatiquement la deuxième condition des G -structures spéciales. Le théorème de Cleyton et Swann ne dit rien dans le cas où la représentation du groupe d'holonomie de $\bar{\nabla}$ est réductible (et il n'y a pas d'analogue du théorème de de Rham pour les connexions à torsion).

Théorème. (Nagy) Toute variété NK est localement un produit riemannien de

- variétés kähleriennes.
- espaces de twisteurs de variétés QK
- espaces 3-symétriques naturellement réductifs
- variétés NK de dimension 6.

Variétés NK homogènes

Corollaire. La classification des variétés NK homogènes se réduit à la dimension 6.

Théorème. (Butruille) Toute variété SNK homogène est un espace 3-symétrique naturellement réductif.

Problème algébrique. **Difficulté** : plus l'isotropie est petite, plus cela devient compliqué. Cas le plus difficile : $S^3 \times S^3$ (système quadratique à 72 inconnues)...

Rappel. Toute variété QK homogène est symétrique (Wolf, Alekseevski).

Autres résultats

Théorème. (Reyes–Carrión) La distribution verticale sur l'espace de twisteurs (NK) d'une variété QK positive est parallèle par rapport à la connexion hermitienne canonique.

Théorème. (Belgun–M., Nagy) Toute variété SNK dont l'holonomie de la connexion hermitienne canonique est réductible est isométrique à $\mathbb{C}P^3$, $F(1,2)$ (ou à un espace de twisteurs en dimension supérieure à 6).

Théorème. (M.–Nagy–Simmelmann) La seule variété SNK de dimension 6 admettant des champs de Killing unitaires est $S^3 \times S^3$.

NK versus QK

	nearly Kähler M^6	quaternion Kähler M^{4k}
courbure	$R = R^{CY} + R^{S^6}$	$R = R^{hyper} + R^{\mathbb{H}P^k}$
Einstein	oui	oui
classification dans le cas homogène	3-symétriques (Butruille)	symétriques (Wolf, Alekseevski)
autres exemples	non	non
rigidité	... (M.-N.-S.)	oui (LeBrun-Salamon)

Problèmes ouverts

- En géométrie quaternion Kähler
 - classification des variétés QK positives
 - classification des variétés Fano de contact
- En géométrie NK
 - variétés SNK de cohomogénéité 1
 - variétés SNK toriques
 - exemples de SNK non-homogènes
- espaces K -symétriques