

Spații omogene stabil complexe

Andrei Moroianu, CNRS

(în colaborare cu Paul Gauduchon și Uwe Semmelmann)

Colocviu IMAR – 15 aprilie 2015

Introducere

Planul expunerii :

- Varietăți diferențiabile stabil complexe
- Spații simetrice
- Clasificarea spațiilor simetrice compacte stabil complexe
- Clasificarea spațiilor omogene compacte de caracteristică Euler nenulă stabil complexe

Bibliografie :

P. Gauduchon, A. Moroianu, U. Semmelmann. *Almost complex structures on quaternion-Kähler manifolds and inner symmetric spaces*, Invent. Math. **184**, 389-403 (2011).

A. Moroianu, U. Semmelmann. *Weakly complex homogeneous spaces*, J. reine angew. Math. **691**, 229-244 (2014).

Partea I

Varietăți diferențiabile stabil complexe

Fibrați vectoriali peste varietăți diferențiabile

Definiție

Fie M o varietate diferențiabilă și $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau \mathbb{C} . Un \mathbb{K} -fibrat vectorial de rang k peste M este o varietate diferențiabilă E împreună cu o submersie $\pi : E \rightarrow M$ cu proprietățile următoare :

- 1 $\forall x \in M$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ este un \mathbb{K} -spațiu vectorial de dimensiune k .
- 2 (trivialitate locală) $\forall x \in M$, $\exists U \ni x$ deschis și $\varphi : U \times \mathbb{K}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ difeomorfism, $\varphi|_{\{x\} \times \mathbb{K}^k} \rightarrow E_x$ isomorfism de \mathbb{K} -spații vectoriale.

Exemple

- Fibratul trivial $E = \xi_k := M \times \mathbb{K}^k$, $\pi := \pi_1$.
- Fibratul tangent $E = TM$, fibrat real de rang $\dim(M)$.

Generalități despre fibrați

Definiție

Secțiune : $\sigma : M \rightarrow E, \pi \circ \sigma = \text{id}$.

Definiție

Morfism de \mathbb{K} -fibrați : aplicație netedă $f : E \rightarrow F$ care păstrează fibrele ($\pi_F \circ f = \pi_E$) și $\forall x \in M, f : E_x \rightarrow F_x$ \mathbb{K} -liniară.

Observații :

- Studiul fibraților : până la izomorfism.
- Nu orice fibrat este izomorf cu fibratul trivial : orice secțiune netedă a lui TS^2 se anulează.
- Sume directe, produse tensoriale de fibrați...

Generalități despre fibrați

E fibrat complex $\rightsquigarrow \bar{E}$ (fibratul conjugat).

Functori între categoriile de fibrați reali și complecși :

Functorul de "uitare" $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}$ și complexificarea $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}$:

- $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}(E) = E^{\mathbb{R}}$, $E_x^{\mathbb{R}} = E_x$ ca spațiu vectorial real.
- $\mathcal{F}^{\mathbb{C}}(E) = E^{\mathbb{C}}$, $E_x^{\mathbb{C}} = E_x \otimes \mathbb{C}$.

$$\mathcal{F}^{\mathbb{R}} \circ \mathcal{F}^{\mathbb{C}}(E) = E \oplus E, \quad \mathcal{F}^{\mathbb{C}} \circ \mathcal{F}^{\mathbb{R}}(E) = E \oplus \bar{E}.$$

Observație

Un fibrat real E este în imaginea lui $\mathcal{F}^{\mathbb{R}}$ \iff admite un automorfism J cu $J \circ J = -\text{id}$. (structură complexă)

Clase caracteristice

- E complex \rightsquigarrow clase Chern $c_k(E) \in H^{2k}(M)$.
- $c_k(\bar{E}) = (-1)^k c_k(E)$.
- E real \rightsquigarrow clase Pontriaghin $p_k(E) \in H^{4k}(M)$,
 $p_k(E) = c_{2k}(E^{\mathbb{C}})$.
- Caracterul Chern $ch_k(E) \in H^{2k}M$,
 $ch_k(E) = S_k(c_1(E), \dots, c_k(E))$, unde S_k este polinomul care asociază funcțiilor simetrice elementare a n variabile ($n \geq k$) suma puterilor k : $x_1^k + \dots + x_n^k = S_k(\sigma_1(x_i), \dots, \sigma_k(x_i))$.
- $ch(E) = \sum ch_k(E)$ este multiplicativ și aditiv :
 $ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F)$, $ch(E \otimes F) = ch(E) \cdot ch(F)$.
- $ch(E) = rk(E) \in H^0(M)$ dacă E este fibrat trivial complex.

Stabilitate

Definiție

Un fibrat se numește **stabil trivial** dacă devine trivial după sumă directă cu un fibrat trivial : $\xi_p \oplus E \cong \xi_{p+k}$.

Exemplu : $TS^n \oplus NS^n \cong \xi_{n+1}$.

Lemă

Clasele Pontriaghin ale unui fibrat real stabil trivial sunt nule :

$$\xi_p \oplus E \cong \xi_{p+k} \implies \xi_p^{\mathbb{C}} \oplus E^{\mathbb{C}} \cong \xi_{p+k}^{\mathbb{C}} \implies p + ch(E^{\mathbb{C}}) = p + k.$$

Nu orice fibrat este stabil trivial :

Exemplu

$ch(T\mathbb{C}P^n) = (1 + \alpha)^{n+1}$, unde $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ este un generator.

$$ch((T\mathbb{C}P^n)^{\mathbb{C}}) = (1 + \alpha)^{n+1} + (1 - \alpha)^{n+1} \implies$$

$p_1(T\mathbb{C}P^n) = (n + 1)(n + 2)\alpha^2$ este ne-nul pentru $n \geq 2$.

Fibrati stabil complecși

Definiție

Un fibrat real E se numește **stabil complex** dacă există un fibrat trivial ξ_p și un fibrat complex F astfel încât

$$\xi_p \oplus E \cong F^{\mathbb{R}}.$$

Un fibrat real stabil trivial este stabil complex.

Definiție

O varietate diferențiabilă M se numește :

- **complexă** dacă are un sistem de coordonate complexe cu schimbări de hartă olomorfe ;
- **aproape complexă** dacă fibratul tangent este complex ($TM \cong F^{\mathbb{R}}$) ;
- **stabil complexă** dacă TM este stabil complex.

Varietăți aproape complexe

Complex \implies aproape complex \implies stabil complex.

Teorema Newlander-Nirenberg (1950)

O varietate aproape complexă este complexă \iff tensorul Nijenhuis se anulează.

Exemplu : cazul sferelor S^n

- S^n stabil complexă $\forall n$
- S^2 și S^6 aproape complexe
- S^4 nu e aproape complexă (Ehresmann, Hopf, 1949)
- S^{2n} nu e aproape complexă pentru $n \geq 4$ (Borel, Serre, 1953)
- S^2 complexă (suprafață Riemann)
- S^6 ??

Varietăți stabil complexe

Problemă

Care varietăți compacte sunt stabil complexe ?

Lemă

$M \times N$ stabil complexă $\iff M$ și N stabil complexe.

Demonstrație : $T(M \times N)|_{M \times \{y\}} \cong TM \oplus \xi_n$.

Exemple simple de varietăți pentru care putem încerca să răspundem la problema de mai sus :

- S^n , $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$...
- Spațiile simetrice
- Spațiile omogene

Partea a II-a

Spații simetrice

Definiții

Definiții echivalente

O varietate riemanniană simplu conexă compactă (M, g) se numește simetrică dacă

- Simetriile geodezice în jurul fiecărui punct sunt izometrii;
- $\nabla R = 0$;
- Grupul de izometrii G acționează tranzitiv pe M și există $\sigma \in \text{Aut}(G)$, $\sigma^2 = \text{id}$ ale cărui puncte fixe formează grupul de izotropie H al unui punct din M .

$M = G/H$ se numește **interior** dacă σ e automorfism interior ($\iff \text{rk}(G) = \text{rk}(H)$).

Exemplu

$S^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ interior $\iff n$ par.

Clasificarea spațiilor simetrice

Clasificarea spațiilor simetrice

Perechile simetrice (G, H) au fost clasificate de Cartan în 1926. În cazul compact și interior, spațiile corespunzătoare sunt produse de :

- Grassmaniene reale orientate
 $\widetilde{\text{Gr}}_p(\mathbb{R}^{p+q}) := \text{Spin}(p+q)/\text{Spin}(p)\text{Spin}(q)$;
- Grassmaniene quaternionice
 $\text{Gr}_p(\mathbb{H}^{p+q}) := \text{Sp}(p+q)/\text{Sp}(p)\text{Sp}(q)$;
- Spații simetrice hermitice (atunci când H nu e semi-simplu) ;
- Spații Wolf (H este normalizatorul unui subgrup $\text{Sp}(1) \subset G$ corespunzător unei radacini maximale) ;
- $F_4/\text{Spin}(9)$; $E_7/\text{SU}(8)$; $E_8/\text{Spin}^+(16)$.

Spații simetrice stabil complexe

Care spații simetrice sunt stabil complexe? Rezultate clasice :

- $\widetilde{\text{Gr}}_p(\mathbb{R}^{p+q})$ nu sunt s.c. pentru $p, q \geq 3$ (Sankaran, Tang 1994) cu câteva excepții : $\widetilde{\text{Gr}}_4(\mathbb{R}^8)$, $\widetilde{\text{Gr}}_4(\mathbb{R}^{10})$, $\widetilde{\text{Gr}}_6(\mathbb{R}^{12})$;
- $\text{Gr}_p(\mathbb{H}^{p+q})$ nu sunt s.c. dacă $p + q \geq 3$ (Hirzebruch 1953, Milnor 1958, Massey 1962, Hsiang, Sczarba 1964) ;
- Spații simetrice hermitice sunt complexe ;
- Spațiile Wolf ??
- $F_4/\text{Spin}(9)$ nu e aproape complex (Borel, Hirzebruch 1958) ;
- $E_7/\text{SU}(8)$, $E_8/\text{Spin}^+(16)$??

Teoremă (Gauduchon, M., Semmelmann 2011)

Un spațiu simetric compact interior e stabil complex \iff produs de sfere și spații simetrice hermitice.

O consecință a stabilității complexe

Teoremă (Gauduchon, M., Semmelmann 2011)

Fie M^{4n} o varietate spin, compactă, stabil complexă și E un fibrat complex auto-dual peste M ($E \cong \bar{E}$). Atunci indexul operatorului Dirac twistat cu $E \otimes TM^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{D}_{E \otimes TM^{\mathbb{C}}} : C^{\infty}(\Sigma^+ M \otimes E \otimes TM^{\mathbb{C}}) \rightarrow C^{\infty}(\Sigma^- M \otimes E \otimes TM^{\mathbb{C}})$$

este par.

Demonstratie. M stabil complexă $\implies TM \oplus \xi_p \cong \tau^{\mathbb{R}} \implies p$ este par și $TM^{\mathbb{C}} \oplus \xi_p^{\mathbb{C}} \cong \tau \oplus \bar{\tau}$.

$$\begin{aligned} \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \tau}) + \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \bar{\tau}}) &= \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes (\tau \oplus \bar{\tau})}) \\ &= \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes TM^{\mathbb{C}}}) + \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \xi_p^{\mathbb{C}}}) \\ &= \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes TM^{\mathbb{C}}}) + p \text{ind}(\mathcal{D}_E). \end{aligned}$$

O consecință a stabilității complexe

E suficient să verificăm $\text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \tau}) = \text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \bar{\tau}})$. Teorema clasică Atiyah-Singer :

$$\text{ind} [\mathcal{D} : C^\infty(\Sigma^+ M) \rightarrow C^\infty(\Sigma^- M)] = \int_M \hat{A}(M),$$

unde $\hat{A}(M) \in H^*(M)$ este un polinom în clasele Pontriaghin.

Mai general, pentru orice fibrat complex F :

$$\text{ind} [\mathcal{D}_F : C^\infty(\Sigma^+ M \otimes F) \rightarrow C^\infty(\Sigma^- M \otimes F)] = \int_M \hat{A}(M) \text{ch}(F).$$

Pentru $F := E \otimes \tau$

$$\text{ind}(\mathcal{D}_{E \otimes \tau}) = \int_M \hat{A}(M) \text{ch}(E) \text{ch}(\tau).$$

$$E \cong \bar{E} \implies \text{ch}_k(E) = (-1)^k \text{ch}_k(\bar{E}) = (-1)^k \text{ch}_k(E) \implies \text{ch}(E) \in H^{4*}(M).$$

O obstrucție la stabilitatea complexă

Corolar

Dacă pe o varietate spin, compactă, M^{4n} există un fibrat complex auto-dual E astfel încât indexul operatorului Dirac twistat cu $E \otimes TM^{\mathbb{C}}$ este impar, atunci M nu este stabil complexă.

Partea a III-a

Indexul spațiilor simetrice compacte

Formula de dimensiune a lui Weyl

Fie $M = G/H$ un spațiu simetric interior compact ireductibil și $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o subalgebră Cartan comună. Fie $\rho : H \rightarrow \text{Aut}(V_\mu)$ o reprezentare complexă a lui H de pondere maximală $\mu \in \mathfrak{t}^*$ și $V := G \times_\rho V_\mu$ fibratul complex peste M asociat lui ρ .

Teoremă

$$\text{ind}(\mathcal{D}_V) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}(G)^+} \frac{\langle \mu + \rho^{\mathfrak{h}}, \alpha \rangle}{\langle \rho^{\mathfrak{g}}, \alpha \rangle} =: i(\mu).$$

unde $\mathcal{R}(G)^+$ este mulțimea rădăcinilor pozitive a lui G iar $\rho^{\mathfrak{h}}$ și $\rho^{\mathfrak{g}}$ sunt semi-sumele rădăcinilor pozitive ale lui H și G .

Demonstrație : Formula de dimensiune a lui Weyl.

Exemplu : $E_8/\text{Spin}^+(16)$

$$\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^8 \subset \mathfrak{spin}(16) \subset \mathfrak{e}_8.$$

$$\mathcal{R}(\text{Spin}(16)) = \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq 8\}.$$

$$\mathcal{W}(\Sigma_{16}^+) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i e_i, \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_8 = 1 \right\}.$$

$$\mathcal{R}(E_8) = \mathcal{R}(\text{Spin}(16)) \cup \mathcal{W}(\Sigma_{16}^+).$$

Exemplu : $E_8/\text{Spin}^+(16)$

În raport cu camera Weyl fundamentală care conține vectorul $(23, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$,

$$\mathcal{R}^+(\text{Spin}(16)) = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 8\}.$$

$$\mathcal{R}^+(E_8) = \mathcal{R}^+(\text{Spin}(16)) \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \varepsilon_i e_i \mid \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_8 = 1 \right\}.$$

$$\rho^{\mathfrak{h}} = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0), \quad \rho^{\mathfrak{g}} = (23, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0).$$

Exemplu : $E_8/\text{Spin}^+(16)$

Fie $M = E_8/\text{Spin}^+(16)$; $TM^{\mathbb{C}}$ este fibratul asociat reprezentării Σ_{16}^+ cu pondere maximală $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathfrak{t}^* \simeq \mathbb{R}^8$. Fie E_k fibratul asociat reprezentării cu pondere maximală $(2k, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ a lui $\text{Spin}^+(16)$.

$E_k \otimes TM^{\mathbb{C}}$ este suma directă a doi fibrați asociați reprezentărilor de ponderi maxime $\mu_1 := \frac{1}{2}(4k + 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ și $\mu_2 := \frac{1}{2}(4k - 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)$. Pentru $k \leq 7$, $i(\mu_1) = i(\mu_2) = 0$. Pentru $k = 8$, $\mu_1 + \rho^h$ e ortogonal pe rădăcina $\alpha = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1)$ deci $i(\mu_1) = 0$. Un calcul elementar arată că $i(\mu_2) = -1$. Deci $E_8/\text{Spin}^+(16)$ nu e stabil complex.

Partea a IV-a

Spații omogene stabil complexe

Clasificarea spațiilor omogene stabil complexe

Teoremă (M., Semmelmann)

Un spațiu omogen compact simplu conex $M = G/H$, cu $\text{rk}(G) = \text{rk}(H)$ e produs de spații din lista de mai jos :

- ① G/H cu structură complexă G -invariantă (clasificate de Hermann 1955) ;
- ② G/H cu fibrat tangent stabil trivial (clasificate de Singhof și Wemmer 1986) ;
- ③ unul din spațiile omogene :
 - $F_4/(\text{Spin}(4) \times T^2)$, $F_4/(\text{Spin}(4) \times U(2))$
 - $SO(2p + 2q + 1)/(SO(2p) \times U)$
 - $Sp(p + q)/(Sp(1)^p \times U)$,

unde U este un subgrup de rang q al lui $U(q)$ pentru $q \geq 1$ iar $p \geq 2$.

Spațiile de la punctul (3) nu au nici fibrat tangent stabil trivial, nici structură complexă G -invariantă.

Ideea demonstrației

Lemă (Borel, Siebenthal)

H maximal în G și $\text{rk}(G) = \text{rk}(H) \implies (G, H)$ pereche simetrică sau listă explicită de 7 perechi : $(G_2, \text{SU}(3)), \dots, (\text{E}_8, \text{SU}(9))$.

Lemă (M., Semmelmann)

Fie $H_0 \subset H_1 \subset G$ grupuri Lie compacte.

- G/H_0 stabil complex $\implies H_1/H_0$ stabil complex.
- G/H_1 stabil complex și H_1/H_0 structură complexă invariantă $\implies G/H_0$ stabil complex.

Corolar (M., Semmelmann)

$\text{E}_7/\text{SU}(8)$ (de dim. 70!) nu e stabil complex.

Ideea demonstrației

Lemă (reluare)

$$H_0 \subset H_1 \subset G$$

- 1 G/H_0 stabil complex $\implies H_1/H_0$ stabil complex.
- 2 G/H_1 stabil complex și H_1/H_0 structură complexă invariantă $\implies G/H_0$ stabil complex.

$$S(U(4) \times U(4)) \subset SU(8) \subset E_7$$

Dacă $E_7/SU(8)$ e stabil complex, punctul 2 din leamnă $\implies E_7/S(U(4) \times U(4))$ stabil complex. Pe de altă parte

$$S(U(4) \times U(4)) \subset SO(12) \times S^1 \subset E_7$$

Punctul 1 din leamnă \implies

$SO(12) \times S^1/S(U(4) \times U(4)) = \text{Gr}_6(\mathbb{R}^{12})$ stabil complex, contradicție.