Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki

Andrei Moroianu

Soit M^n une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki ($n = 4\,k-1$). Soit ΣM le fibré des spineurs sur M et D l'opérateur de Dirac sur ΣM. Alors (cf. [Ka]), M est un espace d'Einstein avec la courbure scalaire $S = n(n-1)$ et on sait (cf. [Bä]) que M admet $k+1$ spineurs de Killing avec la constante $-\frac{1}{2}$, donc la première valeur propre de D est $\frac{n}{2}$ avec la multiplicité $k+1$. Le but de cet article est de trouver deux autres valeurs propres de D et de montrer des inégalités sur les multiplicités de ces valeurs propres. L'outil principal sera la construction du cône CM au-dessus de M et la correspondence entre les spineurs sur M et sur CM. Le cône sur M est défini par $CM = M \times \mathbf{R}_+^*$ avec la métrique $\langle\cdot,\cdot\rangle_{CM} = r^2\langle\cdot,\cdot\rangle_M + dr^2$. Les champs de vecteurs sur M induisent des champs de vecteurs sur CM avec lequels ils seront identifiés dans la suite.

Théorème (Bä). Le fibré des spineurs au-dessus de CM est le pull-back de ΣM par la projection $\pi : CM \to M$. Tout spineur sur M induit un spineur sur CM ; les spineurs ainsi obtenus seront appellés projetables. Un spineur sur M est de Killing si et seulement si le spineur induit sur CM est parallèle. (cf. aussi [Mo]).

Dans ce qui suit, on identifiera souvent un spineur sur M avec le spineur projetable induit sur CM.

La structure hyperkählérienne sur CM s'obtient de la manière suivante : tout champ de vecteurs de Killing X appartenant à la 3-structure de Sasaki sur M induit une structure presque complexe Ω^X sur CM par

$$\Omega^X(X) = \partial r, \quad \Omega^X(\partial r) = -X,$$

$$\Omega^X(Y) = \nabla_Y X, \quad \text{pour } Y \perp X \text{ et } \partial r.$$

On notera par η^X la transformation de ΣM donnée par $\eta^X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} e_i \cdot \nabla_{e_i} X$, où (e_i) est une base orthonormée arbitraire de $X^\perp$.

Pour X comme ci-dessus, Ω^X agit sur l'espace des spineurs parallèles sur CM avec les valeurs propres distinctes $\lambda_j = i(2\,k-4\,j)$, $j \in \{0, ..., k\}$. Soit $\tilde{\psi}_j^X$ un spineur propre parallèle propre pour la valeur propre λ_j de Ω^X, et ψ_j^X le spineur de Killing sur M correspondant (tout spineur parallèle sur CM est projetable).

On voit facilement que si $\tilde{\psi}$ est projetable sur ψ alors $Y \cdot \partial r \cdot \tilde{\psi}$ est projetable sur $Y \cdot \psi$ pour tout vecteur Y sur M (cf. [Mo]), donc

$$\Omega^X \cdot \tilde{\psi}_j^X = \lambda_j \tilde{\psi}_j^X \iff \eta^X \cdot \psi_j^X + X \cdot \psi_j^X = \lambda_j \psi_j^X. \tag{1}$$

On en déduit une relation fondamentale :

$$\begin{aligned} D(X\cdot\psi_j^X) &= \sum_{l=1}^{n-1} e_l\cdot\nabla_{e_l}(X\cdot\psi_j^X)+X\cdot\nabla_X(X\cdot\psi_j^X) \\ &= 2\eta^X\cdot\psi_j^X-\frac{n-1}{2}X\cdot\psi_j^X+\frac{1}{2}X\cdot\psi_j^X \\ &= (-1-\frac{n}{2})X\cdot\psi_j^X+2\lambda_j X\cdot\psi_j^X. \end{aligned}$$

Ceci montre que le spineur $X\cdot\psi_j^X-2\lambda_j\psi_j^X/(n+1)$ est un spineur propre pour D avec la valeur propre $-1-\frac{n}{2}$. La relation (1) montre alors que $(n-1)X\cdot\psi-2\eta^X\cdot\psi$ est spineur propre de D avec la valeur propre $-1-\frac{n}{2}$ pour tout spineur de Killing ψ. Notons $\tau^s=X_s-\frac{2}{n+1}\Omega^s=\frac{n-1}{n+1}X_s-\frac{2}{n+1}\eta^s$.

Théorème A. La multiplicité de la valeur propre $-1-\frac{n}{2}$ est au moins égale à $3(k-1)$.

Preuve. On fixe une base orthonormée (X_1,X_2,X_3) de vecteurs de Killing définissant la 3-structure de Sasaki sur M et pour chaque $s\in\{1,2,3\}$ et $j\in\{0,...,k\}$, ψ_j^s un spineur propre de Ω^{X_s} avec la valeur propre λ_j. Il suffit de montrer que les spineurs $\phi_j^s=\tau^s\cdot\psi_j^s$ sont linéairement indépendants pour $s\in\{1,2,3\}$ et $j\in\{1,...,k-1\}$.

Soient donc a_j,b_j,c_j, $j\in\{1,...,k-1\}$ tels que

$$\sum a_j\phi_j^1+\sum b_j\phi_j^2+\sum c_j\phi_j^3=0. \tag{2}$$

Notons $\psi^1=\sum a_j\psi_j^1$, $\psi^2=\sum b_j\psi_j^2$, $\psi^3=\sum c_j\psi_j^3$. Si, d'une part, on multiplie (2) avec $\frac{1}{2}X_s$, et d'autre part, on dérive la même égalité dans la direction de X_s, et on somme les deux résultats obtenus pour chaque s, on obtient le système

$$\begin{aligned} (1-X_1\cdot X_2\cdot X_3)\cdot(X_2\cdot\psi^2+X_3\cdot\psi^3)=0 \\ (1-X_1\cdot X_2\cdot X_3)\cdot(X_1\cdot\psi^1+X_3\cdot\psi^3)=0 \\ (1-X_1\cdot X_2\cdot X_3)\cdot(X_1\cdot\psi^1+X_2\cdot\psi^2)=0 \end{aligned}$$

Un calcul algébrique simple montre que pour tout $s\in\{1,2,3\}$, le noyau K de la multiplication par $(1-X_1\cdot X_2\cdot X_3)$ ne contient pas les spineurs non-nuls qui se trouvent dans l'espace vectoriel V^s engendré par ψ_j^s, $j\in\{1,...,k-1\}$. Mais le système ci-dessus montre que ψ^1 , ψ^2 , ψ^3 appartiennent repectivement à V^1, V^2, V^3 et à K, par conséquent ils sont nuls. Ceci montre que les coefficients a_j , b_j , c_j sont nuls, ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

On passe maintenant à la recherche d'une autre valeur propre de D. Soit $\psi\in V$ un spineur de Killing sur M. Soit $\{e_1,...,e_{n-3}\}$ un repère local orthonormé de l'espace supplémentaire de l'espace engendré par les trois vecteurs de Killing X_1, X_2, X_3 dans TM. On a

$$\begin{aligned}
D(X_1 \cdot X_2 \cdot \psi) &= \sum e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \sum e_i \cdot X_1 \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&\quad + \sum e_i \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \nabla_{e_i} \psi + X_1 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \psi - \\
&\quad - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_1 \cdot \psi - X_2 \cdot X_3 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - \frac{1}{2} X_2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi + X_3 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - X_3 \cdot X_1 \cdot X_1 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_3 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \psi \\
&= \sum X_2 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot \psi - \sum X_1 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&\quad + \frac{n-3}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&\quad - X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi + \\
&\quad + X_3 \cdot \psi + \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi \\
&= X_2 \cdot (2\eta^1 \cdot \psi + 2 X_2 \cdot X_3 \cdot \psi) - \\
&\quad - X_1 \cdot (2\eta^2 \cdot \psi - 2 X_1 \cdot X_3 \cdot \psi) + \\
&\quad + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 2 X_3 \cdot \psi \\
&= 2 X_2 \cdot \eta^1 \cdot \psi - 2 X_1 \cdot \eta^2 \cdot \psi + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6 X_3 \cdot \psi \\
&= 2 X_2 \cdot (\Omega^1 - X_1) \cdot \psi - 2 X_1 \cdot (\Omega^2 - X_2) \cdot \psi + \\
&\quad + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6 X_3 \cdot \psi \\
&= (2 + \frac{n}{2}) X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + 2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi + \\
&\quad + \frac{4}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi)
\end{aligned}$$

Ceci montre que le spineur $\psi^{1,2}$ donné par

$$\begin{aligned}
\psi^{1,2} = X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \frac{1}{n+3} (2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi) + \\
+ \frac{2}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi),
\end{aligned} \tag{3}$$

est un spineur propre pour D avec la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$ pour tout spineur de Killing ψ sur M.

Théorème B. La multiplicité de la valeur propre $2 + \frac{n}{2}$ est au moins égale à $(k-1)$.

Preuve. Il suffit de montrer que pour $t \in \{1,2,3\}$ fixé, l'application linéaire de V^t dans l'espace propre de D pour la valeur propre $2+\frac{n}{2}$, donnée par $\psi \mapsto \psi^{1,2}$, est injective.

Soit $\psi \in V^t$ tel que $\psi^{1,2} = 0$. Si, pour $s \in \{1,2,3\}$, on dérive (3) dans la direction de X_s, on multiplie la même relation par $\frac{1}{2}X_s$ et on additione les résultats, on obtient le système

$$\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 \cdot X_3 - X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^1 \cdot \psi = 0$$

$$\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 - X_3 \cdot X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0$$

$$(X_1 + X_2 \cdot X_3) \cdot \Omega^1 \cdot \psi + (X_2 + X_3 \cdot X_1) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0$$

Si on somme la première equation multipliée par $-X_2$, la deuxième multipliée par $-X_1$, et la troisième equation, on obtient

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot \psi = 0,$$

donc $\psi \in V^t \cap \ker(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) = \{0\}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

Remarques. 1. On a utilisé sans démonstration quelques résultats algébriques sur les spineurs, qui s'obtiennent sans difficulté suivant, par exemple, l'approche de Kirchberg donnée dans ([Ki]).

2. L'inégalité du théorème B est susceptible d'être améliorée ; en plus par la même méthode on obtient des spineurs propres de D pour la valeur propre $-3-\frac{n}{2}$, sans pouvoir montrer qu'ils sont non-nuls.

Références

[Bä] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy,* Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509-521.

[Ka] T. KASHIWADA, *A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure,* Nat. Sci. Reps. Ochanomizu Univ. **22** (1971), 1-2.

[Ki] K.-D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.

[Mo] A. MOROIANU, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes,* C.R. Acad. Sci. Paris, t.**319**, Série **I** (1994), 1057-1062.

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, URA 169 du CNRS
91128 Palaiseau, France