Géométrie différentielle/*Differential geometry*

Formes harmoniques en présence de spineurs de Killing kählériens

Andrei Moroianu

Résumé - On démontre que le produit de Clifford entre une forme harmonique effective et un spineur de Killing kählérien (cf. [4], [3], [9]) s'annule, ce qui est l'analogue kählérien d'un résultat d'Hijazi concernant les spineurs de Killing riemanniens [3]. Comme conséquence, on montre qu'il n'y a pas de forme parallèle effective de type (p,p) $(p>0)$ sur les variétés de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact.

Harmonic forms in the presence of Kählerian Killing spinors.

Abstract - We show that the Clifford product between an effective harmonic form and a Kählerian Killing spinor (cf. [4], [3], [9]) vanishes, which is the Kählerian analogue of Hijazi's result concerning Riemannian Killing spinors [3]. As a corollary, we prove that there is no parallel effective (p,p)-form $(p>0)$ on Kähler-Einstein manifolds admitting a complex contact structure.

Abridged English Version - In 1984 Hijazi [1], [2] showed that on a spin manifold, M^n, the Clifford product of a harmonic form of degree $k \neq 0, n$ with a Killing spinor vanishes, which led to the theorem that Kähler manifolds do not admit Killing spinors. Because of this, on Kähler manifolds of odd complex dimension one defined the notion of Kählerian Killing spinors ([3], [4], [9]), and manifolds admitting such spinors were called limiting manifolds. The aim of this note is to prove the following result:

Theorem. *On a limiting manifold, the product of a non-constant harmonic effective form with a Kählerian Killing spinor vanishes.*

The idea of the proof is to show, as in [1], [2], that the two chiral parts of this product are both eigenvectors for the square of the Dirac operator with eigenvalues smaller than the least possible eigenvalue on M. In order to obtain this, we write everything in complex coordinates and use the differential equation of the Kählerian Killing spinor. Then, as a consequence we get

Theorem. *The only parallel (p,p)-forms on a Kähler-Einstein manifold M^{8l+6} admitting a complex contact structure are the constant multiples of Ω^p, where Ω is the Kähler form of M.*

---

1. Introduction. En 1984, Hijazi a montré (cf. [1],[2]) que sur une variété spinorielle compacte de dimension n notée M, le produit de Clifford entre une forme harmonique de degré $k \neq 0, n$ et un spineur de Killing est nul. Une conséquence de ce théorème est que si M admet un spineur de Killing, alors il n'y a pas de forme parallèle de degré $k \neq 0, n$ sur M, et en particulier, M n'est pas kählérienne (cf. aussi [7], Prop. 6).

Il était donc naturel de chercher un analogue des spineurs de Killing dans le cas kählérien. Ceci a été fait par Kirchberg en 1986 (cf. [4]) qui a trouvé pour une variété kählérienne compacte spinorielle M, des inégalités optimales entre le carré de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac et la courbure scalaire. Dans le cas où la dimension complexe de M est impaire, les spineurs pour lesquels le cas d'égalité est atteint vérifient une équation différentielle semblable à celle des spineurs de Killing (cf. [3], [4]), et sont appelés, par analogie, des spineurs de Killing kählériens. Les variétés admettant des spineurs de Killing kählériens s'appellent des variétés-limites [9].

Soit M une variété-limite et Ψ un spineur de Killing kählérien. Soit Ω la forme de Kähler de M. Si on essaye de généraliser le théorème d'Hijazi à la lettre, en conjecturant que $\omega \cdot \Psi = 0$ pour toute forme harmonique ω, on se trouve très vite confrontés à une difficulté : le produit $\Omega \cdot \Psi$ est non-nul (cf. [3],[4]), bien que la forme de Kähler Ω soit harmonique. On peut cependant éviter ce problème en limitant la conjecture aux formes *effectives*, car la forme de Kähler joue un rôle très particulier parmi les formes harmoniques. La réponse affirmative à cette conjecture "réduite" et quelques unes de ses conséquences formeront les résultats principaux de ce papier.

2. Préliminaires algébriques. Soit M une variété kählérienne compacte de dimension $n = 2\,m$, J la structure complexe et Ω sa forme de Kähler. Pour chaque point x de M il existe un repère local orthonormé $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ avec $Y_\alpha = J(X_\alpha)$ et $\nabla X_\alpha = \nabla Y_\alpha = 0$ en x, qu'on appellera *adapté*. On considère les bases induites sur $T^{1,0}_x(M)$ et $T^{0,1}_x(M)$:

$$Z_\alpha = \frac{1}{2}\,(X_\alpha - i\,Y_\alpha)\ , \quad Z_{\bar\alpha} = \frac{1}{2}\,(X_\alpha + i\,Y_\alpha).$$

On sait que, une fois la métrique sur M fixée, le fibré en algèbres de Clifford réelles, $\mathrm{Cl}(M)$, est canoniquement isomorphe (en tant que fibré vectoriel) à $\Lambda(TM)$, par la correspondance $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \to e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, pour $i_1 < \ldots < i_k$ et $\{e_i\}$ base orthonormée (l'isomorphisme ne dépend pas du choix de la base).

Evidemment, cet isomorphisme se prolonge par linéarité à un isomorphisme $\varphi : \mathbf{C}l(M) \to \Lambda(TM \oplus \mathbf{C}) \sim \Lambda(T^*M \oplus \mathbf{C})$, et désormais on identifiera les vecteurs et covecteurs complexes par la métrique, et les formes avec les éléments du fibré en algèbres de Clifford complexes $\mathbf{C}l(M)$ via l'isomorphisme φ. On vérifie alors facilement les relations

$$X \cdot \omega = (-1)^k \, \omega \cdot X - 2\, X \lrcorner \, \omega \ , \ \forall X \in TM \oplus \mathbf{C}, \ \omega \in \Lambda(T^*M \oplus \mathbf{C}), \tag{1}$$

$$Z_\alpha \cdot Z_\alpha = Z_{\bar\alpha} \cdot Z_{\bar\alpha} = 0 \quad , \quad Z_\alpha \cdot Z_{\bar\beta} = -Z_{\bar\beta} \cdot Z_\alpha - \delta_{\alpha\beta}, \tag{2}$$

$$Z_\alpha \cdot Z_\beta = -Z_\beta \cdot Z_\alpha \quad , \quad Z_{\bar\alpha} \cdot Z_{\bar\beta} = -Z_{\bar\beta} \cdot Z_{\bar\alpha}, \tag{3}$$

$$Z_\alpha \wedge Z_{\bar\alpha} = \frac{1}{2} + Z_\alpha \cdot Z_{\bar\alpha} = -\frac{1}{2} - Z_{\bar\alpha} \cdot Z_\alpha, \tag{4}$$

$$\sum_\alpha Z_\alpha \cdot Z_{\bar\alpha} = \frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2} \quad , \quad \sum_\alpha Z_{\bar\alpha} \cdot Z_\alpha = -\frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2}. \tag{5}$$

$$2 \sum_\alpha (Z_{\bar\alpha} \wedge (Z_\alpha \lrcorner \, \omega)) = q\, \omega \quad , \ \forall \omega \in \Lambda^{p,q}. \tag{6}$$

Considérons l'opérateur $L : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ donné par $L(\omega) = \omega \wedge \Omega$, et soit Λ son adjoint. On vérifie sans peine (cf. [6]) que $\Lambda = -2 \sum_\alpha Z_\alpha \lrcorner \, Z_{\bar\alpha} \lrcorner$ et

$$(\Lambda\, L - L\, \Lambda)\, \omega = (m - r)\, \omega, \ \forall \omega \in \Lambda^r. \tag{7}$$

Une forme ω s'appelle effective si $\Lambda\, \omega = 0$.

Supposons maintenant que la métrique sur M est normalisée de telle manière que la courbure scalaire soit égale à $n\,(n+2)$, et que en plus M est une variété-limite différente de $\mathbf{C}\mathrm{P}^m$, et soit Ψ le spineur de Killing kählérien qui satisfait (cf. [3], [9])

$$\nabla_X \Psi = \frac{1}{2} (X \cdot \Psi + i\, J(X) \cdot \bar\Psi), \ \forall X. \tag{8}$$

Ici, si par rapport à la $\mathbf{Z}_2$-graduation du fibré des spineurs $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, son conjugué est défini par $\bar\Psi = \Psi_+ - \Psi_-$. On a alors (cf. [3],[9])

$$\Omega \cdot \Psi_+ = -i\, \Psi_+ \quad , \quad \Omega \cdot \Psi_- = i\, \Psi_-, \tag{9}$$

et on trouve à partir de (8)

$$\nabla_{Z_\alpha} \Psi = Z_\alpha \cdot \Psi_- \quad , \quad \nabla_{Z_{\bar\alpha}} \Psi = Z_{\bar\alpha} \cdot \Psi_+. \tag{10}$$

Un calcul simple permet d'écrire l'expression en coordonées complexes de l'opérateur de Dirac D :

$$D = 2 \sum_\alpha (Z_\alpha \cdot \nabla_{Z_{\bar\alpha}} + Z_{\bar\alpha} \cdot \nabla_{Z_\alpha}). \tag{11}$$

3. Le théorème principal.

Théorème A. *Si ω est une forme harmonique effective non-constante sur une variété-limite, et Ψ un spineur de Killing kählérien, alors $\omega \cdot \Psi = 0$.*

Preuve. On fixe un repère local adapté $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha}\}$. La preuve du théorème A repose essentiellement sur deux lemmes :

Lemme 1 *On a les relations*

$$\sum_\beta Z_\beta \cdot \omega \cdot Z_{\bar\beta} = (-1)^{p+q} (\omega \cdot \sum_\beta Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + q\,\omega)$$

et

$$\sum_\beta Z_{\bar\beta} \cdot \omega \cdot Z_\beta = (-1)^{p+q} (\omega \cdot \sum_\beta Z_{\bar\beta} \cdot Z_\beta + p\,\omega)$$

Preuve. Pour chaque $\beta \in \{1, \ldots, m\}$, ω s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega = Z_\beta \wedge Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + Z_\beta \wedge \omega_\beta + Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\bar\beta} + \omega_{\beta,0},$$

où l'expression de chacune des formes $\omega_{\beta\bar\beta}$, ω_β, $\omega_{\bar\beta}$ et $\omega_{\beta,0}$ ne contient pas des termes de la forme Z_β ou $Z_{\bar\beta}$ dans la base $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha}\}$. Evidemment on a

$$\omega_{\beta\bar\beta} = 4\, Z_\beta \lrcorner\, Z_{\bar\beta} \lrcorner\, \omega \text{ et } 2\, Z_\beta \lrcorner\, \omega = -Z_\beta \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + \omega_{\bar\beta}, \tag{12}$$

$$Z_\beta \cdot \omega = (-1)^{p+q}\, \omega \cdot Z_\beta + Z_\beta \cdot \omega_{\beta\bar\beta} - \omega_{\bar\beta}. \tag{13}$$

Cette dernière relation est en fait une conséquence directe de (1) et (12). Si on multiplie à droite par $Z_{\bar\beta}$, on somme sur β dans (13), et on utilise (12) et (6), on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_\beta Z_\beta \cdot \omega \cdot Z_{\bar\beta} &= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} \cdot \omega_{\beta\bar\beta} + Z_{\bar\beta} \cdot \omega_{\bar\beta}) \\
&= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} - (\tfrac{1}{2} + Z_{\bar\beta} \wedge Z_\beta) \wedge \omega_{\beta\bar\beta} + Z_{\bar\beta} \wedge \omega_{\bar\beta}) \\
&= (-1)^{p+q} \sum_\beta (\omega \cdot Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} - \tfrac{1}{2}\, \omega_{\beta\bar\beta} + 2 Z_{\bar\beta} \wedge (Z_\beta \lrcorner\, \omega)) \\
&= (-1)^{p+q} (\omega \cdot \sum_\beta Z_\beta \cdot Z_{\bar\beta} + \Lambda(\omega) + q\,\omega).
\end{aligned}$$

La deuxième relation se démontre de la même manière, ou directement par conjugaison.

†

Lemme 2 *On a la relation*

$$D(\omega \cdot \Psi) = (2q - m - 1)\, \omega \cdot \Psi_+ + (2p - m - 1)\, \omega \cdot \Psi_-.$$

Preuve. On utilise le lemme précédent et les formules (9), (10), et (11) et on obtient

$$\begin{aligned}
D(\omega \cdot \Psi) &= ((d + \delta)\omega) \cdot \Psi + 2 \sum_\alpha (Z_\alpha \cdot \omega \cdot \nabla_{Z_{\bar\alpha}} \Psi + Z_{\bar\alpha} \cdot \omega \cdot \nabla_{Z_\alpha} \Psi) \\
&= 2 \sum_\alpha (Z_\alpha \cdot \omega \cdot Z_{\bar\alpha} \cdot \Psi_+ + Z_{\bar\alpha} \cdot \omega \cdot Z_\alpha \cdot \Psi_-) \\
&= 2 \left(\omega \cdot \left(\frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2} + q\right) \cdot \Psi_+ + \omega \cdot \left(-\frac{\Omega}{2i} - \frac{m}{2} + p\right) \cdot \Psi_-\right) \\
&= (2q - m - 1)\, \omega \cdot \Psi_+ + (2p - m - 1)\, \omega \cdot \Psi_-.
\end{aligned}$$

†

On peut supposer que la métrique de M est normalisée telle que $S = n\,(n+2)$, et on sait alors que toute valeur propre λ de l'opérateur de Dirac satisfait $\lambda^2 \geq (m+1)^2$ (cf. [4], [3], [9]). D'autre part, le lemme précédent montre que

$$D(\omega\cdot\Psi_+) = (2p-m-1)\,\omega\cdot\Psi_- \quad \text{et} \quad D(\omega\cdot\Psi_-) = (2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_+,$$

ce qui implique

$$D^2(\omega\cdot\Psi_+) = (2p-m-1)\,(2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_+, \tag{14}$$

$$D^2(\omega\cdot\Psi_-) = (2p-m-1)\,(2q-m-1)\,\omega\cdot\Psi_-. \tag{15}$$

Comme $|(2p-m-1)\,(2q-m-1)| < (m+1)^2$, on doit avoir $\omega\cdot\Psi = 0$, ce qui achève la preuve du théorème.

Q.E.D.

4. Conséquences.

Lemme 3 *Soit ω une forme parallèle effective de type (p,p). Si $p > 0$, alors $\omega = 0$.*

Preuve. Soit $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$ un repère local adapté en un point $x \in M$. En utilisant (1), (10) et le théorème A, on a

$$0 = \varepsilon\,\nabla_{Z_\alpha}(\omega\cdot\Psi_+) = \varepsilon\,\omega\cdot Z_\alpha\Psi_- = Z_\alpha\cdot\omega\cdot\Psi_- + 2\,Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_-,$$

$$0 = \varepsilon\,\nabla_{Z_{\bar\alpha}}(\omega\cdot\Psi_-) = \varepsilon\,\omega\cdot Z_{\bar\alpha}\Psi_+ = Z_{\bar\alpha}\cdot\omega\cdot\Psi_+ + 2\,Z_{\bar\alpha} \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_+,$$

$(\varepsilon = (-1)^{p+q})$, donc

$$0 = Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_- = Z_{\bar\alpha} \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_+,\ \forall\alpha. \tag{16}$$

En utilisant (16) on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \nabla_{Z_{\bar\beta}}(Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_-) = Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\nabla_{Z_{\bar\beta}}\Psi_- = -\varepsilon\,Z_{\bar\beta}\cdot(Z_\alpha \lrcorner\, \omega)\cdot\Psi_+ \\ & -2\,\varepsilon\,Z_{\bar\beta} \lrcorner\, Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_+ = -2\,\varepsilon\,Z_{\bar\beta} \lrcorner\, Z_\alpha \lrcorner\, \omega\cdot\Psi_+, \end{aligned}$$

en x, donc partout, car l'expression est tensorielle. En répétant cet argument p fois, on voit que

$$(Z_{\alpha_1} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_1} \lrcorner\, \ldots Z_{\alpha_p} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_p} \lrcorner\, \omega)\cdot\Psi_+ = 0,\ \forall\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_p. \tag{17}$$

Mais $(Z_{\alpha_1} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_1} \lrcorner\, \ldots Z_{\alpha_p} \lrcorner\, Z_{\bar\beta_p} \lrcorner\, \omega)$ sont des 0-formes (locales), donc (17) implique qu'elles sont identiquement nulles, et par conséquent $\omega = 0$.

†

Théorème B. *Il n'y a pas de forme parallèle de type (p,p) sur une variété-limite M, en dehors des multiples constants des puissances exterieures de la forme de Kähler.*

Preuve. Soit ω une forme parallèle de type (p,p). On peut alors écrire $\omega = \omega_p + \Omega \wedge \omega_{p-1} + \ldots \Omega^p \wedge \omega_0$, avec $\omega_i \in \Lambda^{i,i}$ formes harmoniques effectives (cf. par example [6]). Soit $\sigma = \omega - \Omega^p \wedge \omega_0$. En appliquant (7) p fois on trouve

$$\Lambda^p \omega = (m-2p)(m-2p+2)\ldots m\,\omega_0.$$

Comme Ω est une forme parallèle, $\Lambda^k\omega$ est parallèle donc ω_0 est une constante (m étant impair, le facteur devant ω_0 est non-nul). Il suffit donc de montrer que $\sigma = 0$. En appliquant (7) $p-1$ fois on trouve

$$\Lambda^{p-1} \sigma = (m-2p)(m-2p+2)\ldots(m-2)\,\omega_1,$$

et comme m est impair, ω_1 est parallèle et effective, donc nulle d'après le lemme 3. Par récurrence on obtient alors $\omega_i = 0$ pour chaque $i \geq 1$.

Q.E.D.

En utilisant le fait (cf. [5],[8]) que les variétés-limites sont exactement les variétés de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact en dimension $8\,l+6$, on peut donner la reformulation suivante des théorème B :

Théorème C. *En dehors des multiples constants des puissances exterieures de la forme de Kähler, il n'y a pas de forme parallèle de type (p,p) sur une variété $M^{8\,l+6}$ de Kähler-Einstein admettant une structure complexe de contact.*

Remerciements. Ces résultats doivent leur existence en grande partie à Jean Pierre Bourguignon, qui m'a proposé de regarder en détail le problème traité ici. Je lui en suis très reconnaissant. Je remercie Oussama Hijazi dont la lecture attentive d'une version préliminaire de cette note m'a permis d'éviter une erreur de calcul qui faussait complètement les résultats de la section 4.

References

[1] O. HIJAZI, *Opérateurs de Dirac sur les variétés riemanniennes : Minoration des valeurs propres,* Thèse de 3ème Cycle, Ecole Polytechnique (1984).

[2] O. HIJAZI, *A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors,* Commun. Math. Phys. **104** (1986), 151-162.

[3] O. HIJAZI, *Eigenvalues of the Dirac operator on compact Kähler manifolds,* Commun. Math. Phys. **160** (1994), 563-579.

[4] K.-D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature,* Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.

[5] K.-D. KIRCHBERG et U. SEMMELMANN, *Complex Contact Structures and the first Eigenvalue of the Dirac Operator on Kähler Manifolds,* preprint, SFB 288, 1994.

[6] A. LASCOUX, M. BERGER, *Variétés Kähleriennes Compactes,* Lecture Notes in Mathematics 154, Berlin, 1970.

[7] A, LICHNEROWICZ, *Spin Manifolds, Killing Spinors and Universality of the Hijazi Inequality,* Lett. Math. Phys. **3** (1987), 331-344.

[8] A. MOROIANU et U. SEMMELMANN, *Kählerian Killing Spinors, Complex Contact Structures and Twistor Spaces,* preprint de l'Institut Schrödinger, Vienne, 1994.

[9] A. MOROIANU, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes,* Commun. Math. Phys., **169**, p. 373-384, 1995.

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, URA 169 du CNRS
91128 Palaiseau, France