Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 23/11/2015 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices peuvent être traités indépendamment mais certains pourront utiliser des résultats obtenus auparavant.

I. Si M et N sont deux variétés différentiables connexes orientées de même dimension n, et $f : M \to N$ est une fonction C^∞ propre, on appelle degré de f l'unique nombre réel d vérifiant

$$\int_{[M]} f^*(\alpha) = d \int_{[N]} \alpha$$

pour tout élément $\alpha \in H^n_c(N) \simeq \mathbb{R}$.

a) Soit $j : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusion canonique. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(t,x) = t\, j(x)$ est propre.

b) Pour toute k-forme différentielle $\sigma \in \Omega^k(M)$ et champ de vecteurs X sur M on définit le produit intérieur $X \lrcorner \sigma \in \Omega^{k-1}(M)$ par $(X \lrcorner \sigma)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \sigma(X, X_1, \ldots, X_{k-1})$. Soit $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\omega_x := x \lrcorner (\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n)$ (dans le membre droit de cette expression, $x \in \mathbb{R}^n$ est vu comme vecteur tangent : $x \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}_x\mathbb{R}^n$). Montrer que $j^*(\omega)$ est non-nulle en chaque point de $\mathbb{S}^{n-1}$.

c) Montrer que par rapport à l'orientation de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ définie par la n-forme $\mathrm{d}t \wedge j^*(\omega)$, le degré de l'application f définie au point a) est égal à 2 pour n pair et à 0 pour n impair. (*Pour alléger les notations,* $j^*(\omega) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ *et* $\mathrm{d}t \in \Omega^1(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1})$ *désignent ici les images réciproques de* $j^*(\omega) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ *et* $\mathrm{d}t \in \Omega^1(\mathbb{R})$ *par les projections canoniques* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ *et* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ *respectivement*).

II. Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 2$.

a) Montrer que l'inclusion $\mathcal{Z}_c^2(M) \hookrightarrow \mathcal{Z}^2(M)$ induit par passage au quotient une application linéaire $c : H_c^2(M) \to H^2(M)$.

b) Montrer que si $\alpha \in \ker(c)$ alors $\alpha \wedge \alpha = 0$ dans $H_c^4(M)$.

III. a) Calculer les groupes de cohomologie et les groupes de cohomologie à support compact de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

b) Montrer que la projection $\pi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est propre et que $\pi^* : H_c^k(\mathbb{R}^k) \to H_c^k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^k)$ est un isomorphisme pour tout entier positif k.

c) Montrer que l'application $c : H_c^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) \to H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2)$ définie en II.a) est nulle.

IV. Le but de cet exercice est de montrer que le fibré tangent $\mathrm{T}\mathbb{S}^2$ de de $\mathbb{S}^2$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Nous allons dans la suite identifier $\mathrm{T}\mathbb{S}^2$ à l'ensemble $M := \{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3,\ \langle x, v\rangle = 0\}$.

a) Montrer que M est une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.

b) Montrer que M et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ ont le même type d'homotopie.

c) Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(t, (x, v)) := (x, v + tx)$ est un difféomorphisme (on pourra calculer son inverse).

d) On note $\Pi_* : H_c^3(\mathbb{R} \times M) \to H_c^2(M)$ et $\Pi_*^0 : H_c^3(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2) \to H_c^2(\mathbb{S}^2)$ les isomorphismes donnés par le théorème III-3 du poly. Si $\pi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la projection canonique, montrer que $\Pi_* \circ \psi^* \circ \pi^* : H_c^3(\mathbb{R}^3) \to H_c^2(M)$ est un isomorphisme. Soit $\beta \in \Omega_c^3(\mathbb{R}^3)$ un élément non-nul et soit $\alpha \in H_c^2(M)$ l'image de β par cet isomorphisme.

e) Soit $h : \mathbb{S}^2 \to M$ l'inclusion $h(x) := (x, 0)$ et soit $H := \mathrm{id} \times h : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R} \times M$. Vérifier la relation $h^* \circ \Pi_* = \Pi_*^0 \circ H^*$ sur $H_c^3(\mathbb{R} \times M)$.

f) Montrer que $\pi \circ \psi \circ H$ est propre et calculer son degré.

g) En déduire que $h^*(\alpha) \neq 0$ dans $H^2(\mathbb{S}^2)$, puis que $c(\alpha) \neq 0$ dans $H^2(M)$.

h) Conclure.

V. Soit M une variété différentiable compacte, connexe, orientée, de dimension $2n$. Montrer que le degré de toute application différentiable $f : \mathbb{S}^4 \times M \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2}$ est nul.