Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 01/12/2014 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symtrique réelle et soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique.

a) Montrer que A est inversible si et seulement si le spectre de A^2 est contenu dans $]-\infty, 0[$.

b) Si A est inversible, montrer que n est pair, (on notera $n = 2m$). Montrer ensuite qu'il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que $f_A(e_{2k-1}) = \lambda_k e_{2k}$ et $f_A(e_{2k}) = -\lambda_k e_{2k-1}$, pour tout $1 \leq k \leq m$.

On considère à présent un espace vectoriel réel E de dimension n. Un élément $\omega \in \Lambda^2(E^*)$ s'appelle non-dégénéré si pour tout $X \in E$ non-nul, il existe $Y \in E$ avec $\omega(X, Y) \neq 0$. Soit $\omega \in \Lambda^2(E^*)$ non-dégénéré.

c) Montrer que n est pair (on notera $n = 2m$).

d) En utilisant le point b) montrer que $\Lambda^{2m}(E^*) \ni \omega^m \neq 0$.

Soit M une variété différentiable. Une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ s'appelle symplectique si elle est fermée et si pour tout $x \in M$, l'élément $\omega_x \in \Lambda^2((\mathrm{T}_x M)^*)$ est non-dégénéré. Soit $\omega \in \Omega^2(M)$ une forme symplectique sur M.

e) Montrer que la dimension de M est paire et que M est orientable.

f) Si M est compacte, montrer que ω n'est pas exacte.

g) Montrer que $S^1 \times S^3$ n'est pas une variété symplectique.

II. Soit M une variété différentiable connexe, compacte, orientée, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ est impaire.

a) Donner un exemple de telle variété.

b) Montrer que la dimension de M est multiple de 4.

c) Réciproquement, si M une variété différentiable connexe, compacte, orientée de dimension $n = 4k$, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est-elle nécessairement impaire ?

III. Soit M une variété compacte, connexe, orientée, de dimension $n \geq 3$ et soient $p_1, \ldots, p_k$ des points distincts de M ($k \geq 1$). On appelle $N := M \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$.

a) Montrer que $H^n(N) = 0$.

b) Calculer les nombres de Betti de N en fonction des nombres de Betti de M.

IV. a) Soient M et N deux variétés différentiables et $n \geq 1$ un nombre entier. Montrer que si $M \times N$ est difféomorphe à S^n alors l'une des deux variétés M et N est un point.

b) Soit M une variété différentiable et $m, n \geq 0$ deux nombres entiers. Montrer que si $M \times S^2$ est difféomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ alors $m = 1$ ou $n = 1$.

V. Si M et N sont deux variétés différentiables compactes orientées de même dimension n, et $f : M \to N$ une fonction C^∞, on appelle degré de f l'unique nombre réel d vérifiant

$$\int_{[M]} f^*(\alpha) = d \int_{[N]} \alpha$$

pour tout élément $\alpha \in H^n(N) \simeq \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $n \geq 2$, le degré de toute application C^∞, $f : S^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est nul.

b) Donner un exemple d'application C^∞, $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to S^{2n}$ de degré non-nul.