Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 09/12/2013 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. Soit ω un élément de $\Lambda^2((\mathbb{R}^n)^*)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme A de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\langle AX, Y \rangle = \omega(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

b) Montrer que la matrice de A dans la base canonique est anti-symétrique.

c) Si n est impair, motrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $\omega(V, X) = 0$ pour tous $X \in \mathbb{R}^n$.

II. Soit M une variété différentiable et $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^{2k+1}(M)$ deux formes différentielles fermées ($d\omega_1 = d\omega_2 = 0$) telles que $\omega_1 - \omega_2$ est exacte. Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte.

III. Calculer les nombres de Betti de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ pour $1 \leq n \leq m$.

IV. Soit $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ définie par $f([z_0 : z_1]) = [z_0 : z_1 : 0]$. Montrer qu'il n'existe aucune application différentiable $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{id}$.

V. On considère le sous-ensemble $Q \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ défini par

$$Q := \left\{ [z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid \sum_{k=0}^{n} z_k^2 = 0 \right\}.$$

a) Montrer que l'ensemble Q est bien défini.

b) Montrer que Q est une sous-variété compacte de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et determiner sa dimension. *Indication : on pourra utiliser l'atlas standard de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

c) On suppose à présent que n est impair, $n = 2m + 1$. Montrer qu'il existe une application linéaire injective $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ qui induit une application $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^m \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dont l'image est contenue dans Q.

d) Montrer que $g^* : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ est un isomorphisme pour tout k tel que $0 \leq k \leq m$.

e) En déduire que les nombres de Betti de Q vérifient $\mathrm{b}_{2k}(Q) \geq 1$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$. *Indication : commencer par le cas où* $k \leq m$.

VI. Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq k \leq n-1$ et soit $S^k \subset \mathbb{R}^n$ la sphère

$$S^k := \{(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = 1\}.$$

a) Montrer que l'ouvert $U_{n,k} := \mathbb{R}^n \setminus S^k$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^k \cup \{P\})$, où P est un point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$. *Indication : on pourra utiliser des projections stéréographiques sur* S^n. *Il n'est pas nécessaire de faire des calculs explicites, on se contentera d'expliquer l'idée générale.*

b) Calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,n-1}$.

c) En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,k}$ pour $k \leq n-2$ (on suppose ici que $n \geq 3$).

d) Soit $n' \geq 2$ un entier et $k' \in \{1, \ldots, n'-1\}$. Montrer que si $U_{n,k}$ est difféomorphe à $U_{n',k'}$ alors $n = n'$ et $k = k'$.

e) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on suppose seulement que $U_{n,k}$ et $U_{n',k'}$ ont le même type d'homotopie ?