Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 10/12/2012 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. a) Soit M une variété connexe de type fini, orientable, de dimension $n \geq 1$, non-compacte. Montrer que $H^n(M) = 0$.

Soit A un sous-ensemble fini non-vide de la sphère S^n. On suppose $n \geq 2$ dans la suite de l'exercice.

b) Montrer que $S^n \setminus A$ est connexe.

c) Montrer que $\mathrm{b}_{n-1}(S^n \setminus A) = |A| - 1$, où $|A|$ désigne le cardinal de A et $\mathrm{b}_{n-1} := \dim(H^{n-1})$ est le $(n-1)$-ème nombre de Betti.

d) Montrer que $S^n \setminus A$ a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable si et seulement si $|A| \leq 2$.

II. Soit M une variété connexe de dimension $n \geq 2$ et $x \in M$ un point quelconque. Montrer que M est orientable si et seulement si $M \setminus \{x\}$ est orientable.

III. On rappelle que si M est une variété connexe compacte orientable de dimension $n \geq 1$, et $f : M \to M$ est une fonction de classe C^∞, le degré de f est l'unique nombre réel qui vérifie

$$f^*(x) = \deg(f)x, \qquad \forall\, x \in H^n(M).$$

a) Vérifier qu'il existe une fonction $c_n : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ de classe C^∞ telle que

$$c_n([z_0 : \ldots : z_n]) = [\bar{z}_0 : \ldots : \bar{z}_n], \qquad \forall\ (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

b) Montrer que $c_1^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ est la multiplication par -1.

c) Soit $j : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'inclusion définie par $j([z_0, z_1]) = [z_0 : z_1 : 0 : \ldots : 0]$. Montrer que $j^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ est un isomorphisme.

d) En déduire que $c_n^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ est la multiplication par -1, puis $\deg(c_n) = (-1)^n$.

e) Montrer que le degré d'une fonction $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}$ de classe C^∞ est toujours positif ou nul.

IV. Dans cet exercice M est une variété de type fini connexe de dimension $n \geq 2$ avec $H^1(M) = 0$ et $f : M \times M \to M$ est une fonction de classe C^∞ possédant un "élément neutre", c'est-à-dire un point $e \in M$ tel que $f(p, e) = f(e, p) = p$ quel que soit $p \in M$. Le but de l'exercice est de montrer que $H^2(M) = 0$.

a) Soient $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ les projections canoniques. Montrer que $H^2(M \times M) = \pi_1^*(H^2(M)) \oplus \pi_2^*(H^2(M))$.

b) Soient $j_1, j_2 : M \to M \times M$ définies par $j_1(p) = (p, e)$, $j_2(p) = (e, p)$. Expliciter les endomorphismes $j_1^* \circ \pi_1^*$, $j_1^* \circ \pi_2^*$, $j_2^* \circ \pi_1^*$ et $j_2^* \circ \pi_2^*$ de $H^2(M)$.

c) Montrer que pour tout $a \in H^2(M)$ on a $f^*(a) = b + c$, où $b := \pi_1^*(a)$ et $c := \pi_2^*(a)$.

d) Si $a \in H^2(M)$ est non-nul montrer qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $a^{k-1} \neq 0$ et $a^k = 0$ [*Rappel:* on note a^k le produit extérieur $a \wedge a \wedge \ldots \wedge a$ (k fois)].

e) En utilisant la formule de Künneth, montrer que les éléments $b^i \wedge c^{k-i}$, $1 \leq i \leq k-1$, sont linéairement indépendants dans $H^{2k}(M \times M)$.

f) Montrer que $H^2(M) = 0$.

g) Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $H^1(M) = 0$?