Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 05/12/2011 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. a) Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid xt - yz = 1 \right\}$$

est une sous-variété de dimension 3 de $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

b) Si $i : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ désigne l'inclusion, montrer que les 1-formes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ $i^*(t\,dx + x\,dt)$ et $i^*(y\,dz + z\,dy)$ sont égales.

II. a) Soient M et N deux variétés différentiables compactes de dimension m et n respectivement. À l'aide de la Formule de Künneth, déterminer le nombre de Betti d'indice maximal $\mathrm{b}_{m+n}(M \times N)$ en fonction des nombres de Betti de M et de N.

b) Montrer que la variété différentiable $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^2$ n'est pas orientable.

c) En examinant l'espace $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \setminus \{x\}$, donner un exemple de variété orientable ayant le même type d'homotopie qu'une variété non-orientable.

III. a) Soit M une variété différentiable connexe, orientable, de dimension n. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

1. M est compacte.
2. $H^n(M) \neq 0$.
3. $H^n(M) = \mathbb{R}$.

b) Montrer que deux variétés compactes orientables qui ont le même type d'homotopie ont la même dimension.

IV. a) Soit N variété différentiable de dimension n. Calculer les nombres de Betti de $S^1 \times N$ en fonction des nombres de Betti de N.

b) Donner un exemple de variété différentiable M, compacte, orientable, de dimension $2n+1$, dont les nombres de Betti sont tous égaux à 1: $\mathrm{b}_k(M) = 1$, $\forall\, k \in \{0, \ldots, 2n+1\}$.

c) Montrer qu'il n'existe aucune variété différentiable compacte orientable de dimension $4n+2$ ayant tous nombres de Betti égaux à 1.

V. Soit P une variété différentiable connexe compacte orientable de dimension $n \geq 2$ et $x \in P$ un point arbitraire.

a) Montrer que $P \setminus \{x\}$ est connexe.

b) Plus généralement, montrer en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris que l'inclusion $i : P \setminus \{x\} \to P$ induit un isomorphisme $i^* : H^k(P) \to H^k(P \setminus \{x\})$ pour tout $k \leq n-1$. On traitera avec une attention particulière le cas où $k = n-1$.

On appelle $\mathcal{M}_d(n)$ *l'ensemble des variétés différentiables connexes compactes* P *de dimension* n *avec la propriété que* $P \setminus \{x\}$ *a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable de dimension* $n-d$*.*

c) Si $P \in \mathcal{M}_d(n)$, montrer que $d \geq 1$, n est multiple de d et que les nombres de Betti de P vérifient

$$\mathrm{b}_k(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indication: Montrer d'abord que $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = \mathrm{b}_{n-d-i}(P \setminus \{x\})$ pour $0 \leq i \leq n-d$, et $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = 0$ pour $n-d+1 \leq i \leq n-1$, puis utiliser le point b) et la dualité de Poincaré pour P afin d'obtenir des relations entre les nombres de Betti de P.

Dans la suite de l'exercice on se propose de montrer que si un produit de deux variétés compactes orientables $M \times N$ *appartient à* $\mathcal{M}_d(n)$ *alors une des variétés* M *ou* N *est réduite à un point. On note* p_M *et* p_N *les projections de* $M \times N$ *sur* M *et* N*.*

d) On suppose que M et N sont deux variétés compactes orientables avec $p := \dim(M) \geq 1$, $q := \dim(N) \geq 1$ telles que $P := M \times N \in \mathcal{M}_d(n)$, où $n = p+q$. Montrer, à l'aide de la Formule de Künneth et du point c), que $\mathrm{b}_i(M) = 0 = \mathrm{b}_i(N)$ pour tous $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ et que $\mathrm{b}_d(M) + \mathrm{b}_d(N) = 1$.

En échangeant les rôles de M *et* N *si nécessaire, on peut donc supposer dans la suite de l'exercice que* $\mathrm{b}_d(M) = 1$ *et* $\mathrm{b}_d(N) = 0$*.*

e) Montrer que $p \geq d$ et $q > d$.

f) Soit α un générateur de $H^p(M) \simeq \mathbb{R}$ et $\beta := i^*((p_M)^*(\alpha)) \in H^p(P \setminus \{x\})$. Montrer l'existence d'un élément $\gamma \in H^{q-d}(P \setminus \{x\})$ tel que $\beta \wedge \gamma \neq 0$.

g) En déduire l'existence d'un élément $\delta \in H^{q-d}(P)$ tel que $(p_M)^*(\alpha) \wedge \delta \neq 0$.

h) Exprimer δ à l'aide de la Formule de Künneth et montrer que $(p_M)^*(\alpha) \wedge \delta = 0$. Conclure.

i) Montrer que l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ n'est pas difféomorphe au produit de deux variétés orientables non-réduites à un point.