Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 13/12/2010 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les 6 exercices sont indépendants.

I. Montrer que les variétés différentiables de dimension 6, $S^2 \times S^4$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, ne sont pas difféomorphes.

II. Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Une 2-forme différentielle ω sur M est dite *non-dégénérée* si

$$\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ fois}} \in \Omega^{2n} M$$

est non-nulle en chaque point de M. Une 2-forme différentielle sur M est dite *symplectique* si elle est non-dégénérée et fermée.

On suppose dans cet exercice que M est compacte et admet une 2-forme non-dégénérée ω.

1. Montrer que M est orientable.
2. Montrer que

$$\int_M \omega^n \neq 0$$

quelle que soit l'orientation choisie sur M pour définir l'intégrale.

Dans la suite de l'exercice on suppose que ω est une 2-forme symplectique sur M.

3. Montrer que $H^{2k}(M) \neq 0$ quel que soit l'entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
4. Pour quels entiers $n \geq 1$ existe-t-il une 2-forme symplectique sur la sphère S^n? Justifier.

III. Soit M une variété différentielle de type fini et de dimension n. On rappelle que la caractéristique d'Euler de M est définie par

$$\chi(M) := \sum_{p=0}^{\dim(M)} (-1)^p \dim(H^p(M)).$$

1. Montrer qu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée:

a) n est pair.

b) M est non-compacte.

c) M est non-orientable.

d) $\chi(M) = 0$.

2. Pour chacune des quatre conditions ci-dessus, donner un exemple de variété différentiable de type fini qui satisfait cette condition et pas les trois autres.

IV. Soit M une variété différentiable de dimension n et soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M. On rappelle que pour tout $i \in I$ et $x \in U_i$, il existe un isomorphisme, que l'on notera $\xi_{i,x}$, entre T_xM et $\mathbb{R}^n$ ($\xi_{i,x} = \psi_i^{-1}$ dans les notations du cours). On note $V_i := \sqcup_{x\in U_i} T_xM$ et on définit la bijection

$$\xi_i : V_i \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

par $\xi_i|_{T_xM} = \xi_{i,x}$.

1. Montrer que $(V_i, \xi_i)_{i\in I}$ est un atlas différentiable sur TM (on admettra l'existence d'une topologie sur TM telle que pour chaque $i \in I$, V_i est un ouvert et ξ_i est un homéomorphisme).

Considérons à présent la sous-variété $M := \mathrm{O}(n)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ {}^t\!AA = I_n\}.$$

2. Determiner, pour chaque $A \in \mathrm{O}(n)$, l'espace tangent $T_A\mathrm{O}(n)$, vu comme sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$ on définit l'automorphisme L_A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $L_A(X) := AX$. Montrer que la restriction de L_A à $T_{I_n}\mathrm{O}(n)$ est un isomorphisme sur $T_A\mathrm{O}(n)$.

4. Montrer que le fibré tangent $T\mathrm{O}(n)$ est difféomorphe à $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{A}(n)$, où $\mathrm{A}(n)$ désigne l'espace vectoriel des matrices anti-symétriques réelles.

V. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-ensembles suivants:

- Le cercle $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ z = 0, \ x^2 + y^2 = 1\}$.
- L'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$.
- Le tore plein ouvert

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2 + y^2 \neq 0, \ d\Big((x, y, z), \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \Big) \Big) < \frac{1}{2} \right\}.$$

1. Montrer que V est difféomorphe à $S^1 \times D$, où D désigne le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $V \setminus S^1$ est difféomorphe à $S^1 \times (D \setminus \{0\})$.

3. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris pour les ouverts U et V, calculer les groupes de cohomologie $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$ et $H_c^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$.

VI. 1. Rappeler, sans démonstration, la liste des groupes de cohomologie à support compact $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

2. Soit M une variété différentiable connexe de dimension n. Pour tout ouvert connexe non-vide $U \subset M$, montrer que l'application naturelle $H_c^n(U) \mapsto H_c^n(M)$ est un isomorphisme.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $n \geq 3$.

3. Soit x un point de M. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact pour un recouvrement ouvert de M bien choisi, montrer que l'application naturelle

$$H_c^k(M \setminus \{x\}) \to H_c^k(M)$$

est un isomorphisme pour $2 \leq k \leq n$ et est surjective pour $k = 1$.

4. Donner un exemple de variété différentiable connexe M pour laquelle l'application naturelle $H_c^1(M \setminus \{x\}) \to H_c^1(M)$ n'est pas injective.

5. Soit $j : M \setminus \{x\} \to M$ l'inclusion canonique. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que l'application

$$j^* : H^k(M) \to H^k(M \setminus \{x\})$$

est un isomorphisme pour $0 \leq k \leq n-2$ et est injective pour $k = n-1$.