Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 23/11/2015 –

9h00 – 12h00

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices peuvent être traités indépendamment mais certains pourront utiliser des résultats obtenus auparavant.

I. Si M et N sont deux variétés différentiables connexes orientées de même dimension n, et $f : M \to N$ est une fonction C^∞ propre, on appelle degré de f l'unique nombre réel d vérifiant

$$\int_{[M]} f^*(\alpha) = d \int_{[N]} \alpha$$

pour tout élément $\alpha \in H^n_c(N) \simeq \mathbb{R}$.

a) Soit $j : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusion canonique. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(t, x) = t\, j(x)$ est propre.

Tout compact est contenu dans une boule fermée. Or, $f^{-1}\left(\overline{B_0(r)}\right) = \mathbb{S}^{n-1} \times [-r, r]$.

b) Pour toute k-forme différentielle $\sigma \in \Omega^k(M)$ et champ de vecteurs X sur M on définit le produit intérieur $X \lrcorner \sigma \in \Omega^{k-1}(M)$ par $(X \lrcorner \sigma)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \sigma(X, X_1, \ldots, X_{k-1})$. Soit $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\omega_x := x \lrcorner (\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n)$ (dans le membre droit de cette expression, $x \in \mathbb{R}^n$ est vu comme vecteur tangent : $x \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}_x\mathbb{R}^n$). Montrer que $j^*(\omega)$ est non-nulle en chaque point de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Soit $v_1, \ldots, v_{n-1}$ une base de $T_x\mathbb{S}^{n-1}$. On sait que $\mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, \mathrm{d}j_x(v_{n-1})$ est une base de $j(x)^\perp$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}(j^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) &= \omega_{j(x)}(\mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, \mathrm{d}j_x(v_{n-1})) \\ &= (\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n)(j(x), \mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, \mathrm{d}j_x(v_{n-1})) \neq 0\end{aligned}$$

car $j(x), \mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, \mathrm{d}j_x(v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que par rapport à l'orientation de $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$ définie par la n-forme $\mathrm{d}t\wedge j^*(\omega)$, le degré de l'application f définie au point a) est égal à 2 pour n impair et à 0 pour n pair. (*Pour alléger les notations,* $j^*(\omega) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1})$ *et* $\mathrm{d}t \in \Omega^1(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1})$ *désignent ici les images réciproques de* $j^*(\omega) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ *et* $\mathrm{d}t \in \Omega^1(\mathbb{R})$ *par les projections canoniques* $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ *et* $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{R}$ *respectivement*).

D'après un exercice de PC, le degré de f est égal au nombre de préimages d'une valeur régulière, chaque préimage y étant comptée avec le signe ± 1 selon que $\mathrm{d}f_y$ préserve ou pas l'orientation. Or $\mathrm{d}f_y$ préserve l'orientation si et seulement si $f^*(\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)_y$ est un multiple positif de $(\mathrm{d}t\wedge j^*(\omega))_y$.

Soit $\xi = 1$ le champ de vecteurs unitaire constant sur $\mathbb{R}$ (donc $\mathrm{d}t(\xi) = 1$). La différentielle de f sur la base $\xi, v_1, \ldots, v_{n-1}$ de $\mathrm{T}_{(t,x)}\mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$ est donnée par $\mathrm{d}f_{(t,x)}(\xi) = j(x)$ et $\mathrm{d}f_{(t,x)}(v_i) = t\mathrm{d}j_x(v_i)$. On a donc

$$\begin{aligned} A &:= f^*(\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)_{(t,x)}(\xi, v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ &= (\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)_{tj(x)}(j(x), t\mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, t\mathrm{d}j_x(v_{n-1})) \\ &= t^{n-1}\omega_{j(x)}(\mathrm{d}j_x(v_1), \ldots, \mathrm{d}j_x(v_{n-1})) = t^{n-1}(j^*\omega)_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ &= t^{n-1}(\mathrm{d}t\wedge j^*(\omega))_{(t,x)}(\xi, v_1, \ldots, v_{n-1}), \end{aligned}$$

donc $f^*(\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)_{(t,x)} = t^{n-1}(\mathrm{d}t\wedge j^*(\omega))_{(t,x)}$. Ceci montre que $\mathrm{d}f_{(t,x)}$ est un isomorphisme pour tout $t\neq 0$. Pour n impair cet isomorphisme préserve l'orientation choisie, alors que pour n pair, $\mathrm{d}f_{(t,x)}$ prsérve l'orientation pour $t > 0$ et renverse l'orientation pour $t < 0$. Tout vecteur non-nul $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est valeur régulière de f et a deux préimages, $(|y|, y/|y|)$ et $(-|y|, -y/|y|)$. La conclusion en résulte immédiatement.

II. Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 2$.

a) Montrer que l'inclusion $\mathcal{Z}^2_c(M) \hookrightarrow \mathcal{Z}^2(M)$ induit par passage au quotient une application linéaire $c : H^2_c(M) \to H^2(M)$.

Il suffit de remarquer que $\mathcal{B}^2_c(M) \subset \mathcal{B}^2(M)$, donc son image par la composition

$$\mathcal{Z}^2_c(M) \hookrightarrow \mathcal{Z}^2(M) \to H^2(M)$$

est nulle.

b) Montrer que si $\alpha \in \ker(c)$ alors $\alpha\wedge\alpha = 0$ dans $H^4_c(M)$.

Soit $\alpha = [\omega]$ avec $\omega \in \mathcal{Z}^2_c(M)$. Si $c(\alpha) = 0$, cela signifie que la classe de cohomologie de ω est nulle dans $H^2(M)$, donc il existe une 1-forme σ telle que $\omega = \mathrm{d}\sigma$. Alors $\sigma\wedge\omega$ est une 3-forme à support compact (car contenu dans le support de ω) et $\mathrm{d}(\sigma \wedge \omega) = \omega \wedge \omega$. Ceci montre que $\alpha \wedge \alpha = [\omega] \wedge [\omega] = [\omega \wedge \omega] = 0$ dans $H^4_c(M)$.

III. a) Calculer les groupes de cohomologie et les groupes de cohomologie à support compact de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$.

D'après le lemme de Poincaré on a

$$H^k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) = H^k(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et d'après un résultat du cours:

$$H^k_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) = H^{k-2}_c(\mathbb{S}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 2 \text{ ou } k = 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Montrer que la projection $\pi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est propre et que $\pi^* : H^k_c(\mathbb{R}^k) \to H^k_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^k)$ est un isomorphisme pour tout entier positif k.

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^k$, $\pi^{-1}(K) = \mathbb{S}^2 \times K$ est compact donc π est propre. D'après le cours (Thm. III-3 appliqué k fois) on sait que l'intégrale sur le facteur $\mathbb{R}^k$ définit un isomorphisme $\Pi_* : H^k_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^k) \to H^0_c(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$. Soit ω une k-forme à support compact sur $\mathbb{R}^k$, d'intégrale 1. Sa classe de cohomologie engendre $H^k_c(\mathbb{R}^k)$. On a clairement $\Pi_* \pi^*(\omega) = 1$, donc π^* est une application linéaire non-nulle entre deux espaces vectoriels de dimension 1.

c) Montrer que l'application $c : H^2_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) \to H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2)$ définie en II.a) est nulle.

L'inclusion $i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 0)$ induit un isomorphisme $i^* : H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2) \to H^2(\mathbb{S}^2)$. Comme $\pi \circ i$ est l'application constante, on a $(p \circ i)^*(\omega) = 0$ quelle que soit $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. On a donc que $\pi^*(\omega)$ est exacte pour toute 2-forme $\omega \in \mathcal{Z}^2(\mathbb{R}^2)$, en particulier pour $\omega \in \mathcal{Z}^2_c(\mathbb{R}^2)$. Or b) montre que tout élément de $H^2_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2)$ admet un représentant de la forme $\pi^*(\omega)$. Son image par c est donc nulle.

IV. Le but de cet exercice est de montrer que le fibré tangent $\mathrm{T}\mathbb{S}^2$ de de $\mathbb{S}^2$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Nous allons dans la suite identifier $\mathrm{T}\mathbb{S}^2$ à l'ensemble $M := \{(x, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3,\ \langle x, v \rangle = 0\}$.

a) Montrer que M est une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$.

Soit $F : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,v) = \langle x, v\rangle$. Pour $V \in \mathrm{T}_v\mathbb{R}^3 \subset \mathrm{T}_{(x,v)}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3)$, on a $\mathrm{d}F_{(x,v)}(V) = \langle x, V\rangle$, donc F est de rang maximal 1 en chaque point.

b) Montrer que M et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ ont le même type d'homotopie.

La projection $r : M \to \mathbb{S}^2$, $r(x,v) = x$ est une équivalence d'homotopie. En effet, si $i : \mathbb{S}^2 \to M$ est définie par $i(x) = (x, 0)$, alors $r \circ i = \mathrm{id}$ et $i \circ r$ est homotope à l'identité de M par $F : M \times \mathbb{R} \to M$, $F((x,v),t) = (x, tv)$. D'autre part, il est bien connu que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^2$.

c) Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(t, (x,v)) := (x, v + tx)$ est un difféomorphisme (on pourra calculer son inverse).

L'inverse de ψ est $\phi(x,w) = (\langle v, w\rangle, (x, w - \langle v, w\rangle v))$. Les deux applications sont manifestement de classe C^∞.

d) On note $\Pi_* : H^3_c(\mathbb{R} \times M) \to H^2_c(M)$ et $\Pi^0_* : H^3_c(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2) \to H^2_c(\mathbb{S}^2)$ les isomorphismes donnés par le théorème III-3 du poly. Si $\pi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la projection canonique, montrer que $\Pi_* \circ \psi^* \circ \pi^* : H^3_c(\mathbb{R}^3) \to H^2_c(M)$ est un isomorphisme. Soit $\beta \in \Omega^3_c(\mathbb{R}^3)$ un élément non-nul et soit $\alpha \in H^2_c(M)$ l'image de β par cet isomorphisme.

Comme ψ est un difféomorphisme, $\psi^* : H^3_c(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3) \to H^3_c(\mathbb{R} \times M)$ est un isomorphisme. Il suffit ensuite de remarquer que π^* est bien défini, et induit un isomorphisme en cohomologie à support compact par III.b).

e) Soit $h : \mathbb{S}^2 \to M$ l'inclusion $h(x) := (x, 0)$ et soit $H := \mathrm{id} \times h : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R} \times M$. Vérifier la relation $h^* \circ \Pi_* = \Pi^0_* \circ H^*$ sur $H^3_c(\mathbb{R} \times M)$.

Rappelons que $\Pi_*([\sigma]) = [\int_\mathbb{R} \tau(t)\mathrm{d}t]$ si $\sigma = \omega(t) + \tau(t) \wedge \mathrm{d}t \in \mathcal{Z}^3_c(\mathbb{R} \times M)$. On a alors

$$h^* \circ \Pi_*([\sigma]) = [h^*(\int_\mathbb{R} \tau(t)\mathrm{d}t)] = [\int_\mathbb{R} h^*(\tau(t))\mathrm{d}t],$$

et

$$\Pi^0_* \circ H^*([\sigma]) = \Pi^0_*([h^*(\omega(t) + h^*(\tau(t)) \wedge \mathrm{d}t)]) = [\int_\mathbb{R} h^*(\tau(t))\mathrm{d}t].$$

f) Montrer que est propre et calculer son degré.

On a $\pi \circ \psi \circ H(t,x) = tj(x)$, donc d'après I.a) l'application est propre, et d'après I.c) son degré est égal à 2.

g) En déduire que $h^*(\alpha) \neq 0$ dans $H^2(\mathbb{S}^2)$, puis que $c(\alpha) \neq 0$ dans $H^2(M)$.

On a d'après e):

$$h^*(\alpha) = h^*((\Pi_* \circ \psi^* \circ \pi^*)(\beta)) = \Pi^0_*(\pi \circ \psi \circ H)^*(\beta).$$

Or, Π^0_* est un isomorphisme, et $(\pi \circ \psi \circ H)^*$ est un isomorphisme de $H^3_c(\mathbb{R}^3)$ sur $H^3_c(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2)$, car le degré de $\pi \circ \psi \circ H$ est non-nul.

On remarque ensuite que $h^*(c(\alpha)) = h^*(\alpha)$, où h^* est l'application induite en cohomologie simple dans le membre de gauche et en cohomologie à support compact dans le membre de droite. Comme $h^* : H^2(M) \to H^2(\mathbb{S}^2)$ est un isomorphisme, le point f) montre que $c(\alpha) \neq 0$.

h) Conclure.

Si par l'absurde M était difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$, l'application $c : H^2_c(M) \to H_2(M)$ serait nulle d'après III.c). Or, ceci contredirait g).

V. Soit M une variété différentiable compacte, connexe, orientée, de dimension $2n$. Montrer que le degré de toute application différentiable $f : \mathbb{S}^4 \times M \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2}$ est nul.

Soit $\alpha \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2})$ un générateur et $\pi : \mathbb{S}^4 \times M \to M$ la projection canonique. On a $f^*(\alpha) \in H^2(\mathbb{S}^4 \times M) = \pi^*(H^2(M))$ par la formule de Künneth, car $H^1(\mathbb{S}^4) = 0 = H^2(\mathbb{S}^4)$. Par conséquent il existe $\beta \in H^2(M)$ avec $\varphi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$ et donc

$$f^*(\alpha^{n+2}) = (f^*(\alpha))^{n+2} = (\pi^*(\beta))^{n+2} = \pi^*(\beta^{n+2}) = 0,$$

car $\beta^{n+2} \in H^{2n+4}(M) = 0$. Comme α^{n+2} est un générateur de $H^{2n+4}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n+2})$, ceci montre que le degré de f est nul.