Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 01/12/2014 –

9h00 – 12h00

– Corrigé –

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symtrique réelle et soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans la base canonique.

a) Montrer que A est inversible si et seulement si le spectre de A^2 est contenu dans $]-\infty, 0[$.

A^2 est symétrique donc son spectre est réel. Si λ est valeur propre de A^2 pour un vecteur propre X, on a

$$\lambda|X|^2 = \langle A^2X, X\rangle = \langle AX, A^tX\rangle = -|AX|^2 \leq 0$$

donc $\lambda \leq 0$. Si A est inversible, A l'est également, donc $\lambda < 0$. L'autre implication est évidente.

b) Si A est inversible, montrer que n est pair, (on notera $n = 2m$). Montrer ensuite qu'il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels strictement positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que $f_A(e_{2k-1}) = \lambda_k e_{2k}$ et $f_A(e_{2k}) = -\lambda_k e_{2k-1}$, pour tout $1 \leq k \leq m$.

On a $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$, donc si $\det(A) \neq 0$, n est pair. On va montrer par récurrence sur la dimension que pour tout endomorphisme anti-symétrique f d'un espace euclidien, il existe une base orthonormée avec les propriétés demandées. L'initialisation est évidente. Comme f^2 est symétrique, il admet un vecteur propre e_1, avec

$f^2(e_1) = -\lambda_1^2 e_1$. Alors $e_2 := \frac{1}{\lambda_1} f(e_1)$ est unitaire, orthogonal à e_1, et l'espace engendré par e_1, e_2 est stable par f. Comme f est anti-symétrique, l'orthogonal de cet espace est aussi stable par f, et on conclut par récurrence.

On considère à présent un espace vectoriel réel E de dimension n. Un élément $\omega \in \Lambda^2(E^*)$ s'appelle non-dégénéré si pour tout $X \in E$ non-nul, il existe $Y \in E$ avec $\omega(X, Y) \neq 0$. Soit $\omega \in \Lambda^2(E^*)$ non-dégénéré.

c) Montrer que n est pair (on notera $n = 2m$).

Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de E et $a_{ij} := \omega(f_i, f_j)$. La matrice $A := (a_{ij})$ est anti-symétrique et comme ω est non-dégénéré, A est inversible. En effet, si $AX = 0$ on a $\omega(f_i, X) = 0$ pour tout i, donc $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X) = 0$ pour tout $Y \in E$, ce qui implique $X = 0$. Donc n est pair d'après b).

d) En utilisant le point b) montrer que $\Lambda^{2m}(E^*) \ni \omega^m \neq 0$.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés de b). On appelle P la matrice de passage de la base canonique à cette base. La matrice $B := P^{-1}AP$ vérifie donc $B_{2k-1,2k} = -B_{2k,2k-1} = \lambda_k$ et $B_{ij} = 0$ pour $|i - j| \neq 1$. On appelle $g_i := \sum_j P_{ij} f_j$ qui est une base de E, et g_i^* la base duale. On a clairement

$$\omega = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \omega(g_i, g_j) g_i^* \wedge g_j^*,$$

et comme P est une matrice orthogonale, un calcul immédiat donne $\omega(g_i, g_j) = B_{ij}$. Par conséquent

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_{2k-1}^* \wedge g_{2k}^*$$

et

$$\omega^m = m! \lambda_1 \cdots \lambda_m g_1^* \wedge \ldots \wedge g_{2m}^* \neq 0.$$

Soit M une variété différentiable. Une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ s'appelle symplectique si elle est fermée et si pour tout $x \in M$, l'élément $\omega_x \in \Lambda^2((\mathrm{T}_x M)^*)$ est non-dégénéré. Soit $\omega \in \Omega^2(M)$ une forme symplectique sur M.

e) Montrer que la dimension de M est paire et que M est orientable.

La parité résulte de c), et l'orientabilité de d).

f) Si M est compacte, montrer que ω n'est pas exacte.

La forme $\psi := \omega^m$ induit une orientation sur M. Plus précisément, il existe un atlas (U_i, φ_i) tel que $(\varphi_i^{-1})^*(\psi|_{U_i}) = f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ avec $f_i > 0$. Supposons par l'absurde $\omega = d\sigma$. Alors $\omega^m = d(\sigma \wedge \omega^{m-1})$ donc d'après le Théorème de Stokes,

$$\int_{[M]} \omega^m = 0.$$

D'autre part, la définition de l'intégrale montre immédiatement que l'intégrale de la n-forme ψ à l'aide de l'atlas (U_i, φ_i) est strictement positive, contradiction.

g) Montrer que $S^1 \times S^3$ n'est pas une variété symplectique.

D'après ce qui précède, si M est symplectique compacte, $H^2(M) \neq 0$. Or, le Théorème de Künneth donne

$$\begin{aligned} H^2(S^1 \times S^3) &\simeq (H^2(S^1) \otimes H^0(S^3)) \oplus (H^1(S^1) \otimes H^1(S^3)) \oplus (H^0(S^1) \otimes H^2(S^3)) \\ &\simeq (0 \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes 0) \oplus (\mathbb{R} \otimes 0) = 0. \end{aligned}$$

II. Soit M une variété différentiable connexe, compacte, orientée, dont la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ est impaire.

a) Donner un exemple de telle variété.

$\chi(\mathbb{C}\mathrm{P}^2) = 3$ (ou plus simplement, $\chi(\mathbb{R}^0) = 1$).

b) Montrer que la dimension de M est multiple de 4.

Soit n la dimension de M. Nous avons vu en PC que $\chi(M) = 0$ si n est impaire. Si $n = 4k + 2$, la dualité de Poincaré donne

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{i=0}^{4k+2} (-1)^i \mathrm{b}_i(M) = \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \mathrm{b}_i(M) - b_{2k+1}(M) + \sum_{i=2k+1}^{4k+2} (-1)^i \mathrm{b}_{4k+2-i}(M) \\ &= 2 \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \mathrm{b}_i(M) - b_{2k+1}(M). \end{aligned}$$

Or, nous avons vu en cours que $\mathrm{b}_{2k+1}(M)$ est pair.

c) Réciproquement, si M une variété différentiable connexe, compacte, orientée de dimension $n = 4k$, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est-elle nécessairement impaire ?

Non, par exemple $\chi(S^4) = 2$.

III. Soit M une variété compacte, connexe, orientée, de dimension $n \geq 3$ et soient $p_1, \ldots, p_k$ des points distincts de M ($k \geq 1$). On appelle $N := M \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$.

a) Montrer que $H^n(N) = 0$.

N est connexe, non-compacte, orientable. Par récurrence sur k on montre que N est de type fini, donc la dualité de Poincaré donne $H^n(N) \simeq (H^0_c(N))^* = 0$.

b) Calculer les nombres de Betti de N en fonction des nombres de Betti de M.

Soient U_i des voisinages 2 à 2 disjoints de p_i, difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. On applique la suite de Mayer-Vietoris aux ouverts $U := N$ et $V := U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Comme $U \cap V$ est une union disjointe de k ouverts difféomorphes à $R^n \setminus \{0\}$, on a les suites exactes:

$$0 \to H^0(M) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \to H^1(M) \to H^1(N) \oplus 0 \to H^1(U \cap V) = 0,$$

donc $1 - (k+1) + k - \mathrm{b}_1(M) + \mathrm{b}_1(N) = 0$,

$$0 = H^{i-1}(U \cap V) \to H^i(M) \to H^i(N) \to H^i(U \cap V) = 0$$

pour $2 \leq i \leq n-2$, donc $\mathrm{b}_i(M) = \mathrm{b}_i(N)$, et d'après a):

$$0 = H^{n-2}(U \cap V) \to H^{n-1}(M) \to H^{n-1}(N) \to H^{n-1}(U \cap V) \to H^n(M) \to H^n(N) = 0,$$

donc $\mathrm{b}_{n-1}(M) - \mathrm{b}_{n-1}(N) + k - 1 = 0$. On en déduit

$$\mathrm{b}_i(N) = \begin{cases} \mathrm{b}_i(M) & i \leq n-2 \\ \mathrm{b}_{n-1}(M) + (k-1) & i = n-1 \\ 0 & i = n \end{cases}.$$

IV. a) Soient M et N deux variétés différentiables et $n \geq 1$ un nombre entier. Montrer que si $M \times N$ est difféomorphe à S^n alors l'une des deux variétés M et N est un point.

Soient p et q les dimensions de M et N. Clairement $p + q = n$. Par Künneth on a $1 = \mathrm{b}_n(S^n) = \mathrm{b}_p(M)\mathrm{b}_q(N)$ (les autres termes sont nuls pour des raisons de dimension. Ceci montre que $\mathrm{b}_p(M) = \mathrm{b}_q(N) = 1$. Par Künneth de nouveau on trouve $\mathrm{b}_p(S^n) \geq \mathrm{b}_p(M)\mathrm{b}_0(N) = 1$, donc soit $p = 0$, soit $p = n$ (dans quel cas $q = 0$).

b) Soit M une variété différentiable et $m, n \geq 0$ deux nombres entiers. Montrer que si $M \times S^2$ est difféomorphe à $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ alors $m = 1$ ou $n = 1$.

Soit $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m \to M \times S^2$ un difféomorphisme et π la projection de $M \times S^2$ sur S^2. Supposons d'abord $m = 0$ et $n > 1$. On appelle α un générateur de $H^2(S^2)$ et

β un générateur de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. D'après le Théorème de Künneth, $\pi^*(\alpha)$ est non-nul dans $H^2(M \times S^2)$ donc $f^*\pi^*(\alpha)$ est non-nul dans $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(\pi \circ f)^*(\alpha) = \lambda\beta$. Comme $\alpha^2 \in H^4(S^2) = 0$ on a $0 = (\pi \circ f)^*(\alpha^2) = \lambda^2\beta^2$, donc $\beta^2 = 0$, contradiction avec le fait que $\beta^n \neq 0$. On montre de même que le cas $n = 0$, $m > 1$ est impossible. Supposons, enfin, que $m, n > 1$. On appelle β, γ des générateurs de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ et $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ respectivement et p_1, p_2 les projections de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^m$. Comme précédemment on a $(\pi \circ f)^*(\alpha) = \lambda_1 p_1^*(\beta) + \lambda_2 p_2^*(\gamma)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. D'après le Théorème de Künneth les éléments $p_1^*(\beta^2)$, $p_1^*(\beta) \wedge p_2^*(\gamma)$ et $p_2^*(\gamma^2)$ de $H^4(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ sont linéairement indépendants, et comme $(\pi \circ f)^*(\alpha) = 0$ on en déduit $\lambda_1^2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2^2 = 0$, contradiction.

V. Si M et N sont deux variétés différentiables compactes orientées de même dimension n, et $f : M \to N$ une fonction C^∞, on appelle degré de f l'unique nombre réel d vérifiant

$$\int_{[M]} f^*(\alpha) = d \int_{[N]} \alpha$$

pour tout élément $\alpha \in H^n(N) \simeq \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $n \geq 2$, le degré de toute application C^∞, $f : S^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est nul.

Soit β un générateur de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. On sait que $\alpha := \beta^n$ engendre $H^n(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Or, $f^*(\beta) \in H^2(S^{2n}) = 0$ pour $n \geq 2$, donc $f^*(\alpha) = f^*(\beta)^n = 0$, ce qui implique $\deg(f) = 0$.

b) Donner un exemple d'application C^∞, $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to S^{2n}$ de degré non-nul.

On définit l'application $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to S^{2n}$ par

$$f([z_0 : \ldots : z_n]) = \begin{cases} \pi_N^{-1}(\frac{1}{z_0}(z_1, \ldots, z_n)) & z_0 \neq 0 \\ N & z_0 = 0, \end{cases}$$

où $N \in S^{2n}$ est le pôle nord et $\pi_N : S^{2n} \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ est la projection stéréographique. On vérifie dans les atlas standard que f est bien C^∞. Tous les points de $S^{2n} \setminus \{N\}$ sont valeurs régulières de f, et f est un difféomorphisme qui préserve l'orientation entre l'ouvert $\{z_0 \neq 0\}$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et $S^{2n} \setminus \{N\}$. Un résultat de PC montre que le degré de f est égal au nombre de préimages d'une valeur régulière comptés avec le signe donné par le jacobien de f en chaque préimage. Pour notre exemple on a donc $\deg(f) = 1$.