Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 09/12/2013 –

9h00 – 12h00

– Corrigé –

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. Soit ω un élément de $\Lambda^2((\mathbb{R}^n)^*)$. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme A de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\langle AX, Y\rangle = \omega(X,Y), \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

On prend $A(X) := \sum_{i=1}^n \omega(X, e_i)e_i$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique (ou toute autre base orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que la matrice de A dans la base canonique est anti-symétrique.

Comme ω est anti-symétrique en tant que forme bilinéaire, on a $\langle AX, Y\rangle = -\langle AY, X\rangle$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$. En identifiant A avec sa matrice dans la base canonique on a donc

$$\langle AX, Y\rangle = -\langle AY, X\rangle = -\langle Y, {}^tAX\rangle = -\langle {}^tAX, Y\rangle, \qquad \forall\ X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

d'où $A = -{}^tA$.

c) Si n est impair, motrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ non-nul tel que $\omega(V, X) = 0$ pour tous $X \in \mathbb{R}^n$.

On a $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n\det(A)$. Si n est impair on a donc $\det(A) = 0$. Pour $V \in \operatorname{Ker}(A)$ non-nul on a la relation demandée.

II. Soit M une variété différentiable et $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^{2k+1}(M)$ deux formes différentielles fermées ($d\omega_1 = d\omega_2 = 0$) telles que $\omega_1 - \omega_2$ est exacte. Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte.

Soit $\sigma \in \Omega^{2k}(M)$ telle que $\omega_1 - \omega_2 = d\sigma$. Comme ω_1 est de degré impair on a $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$, donc

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (\omega_1 + d\sigma) = \omega_1 \wedge d\sigma.$$

Or, d'après les propriétés de la différentielle extérieure on a

$$d(\omega_1 \wedge \sigma) = (d\omega_1) \wedge \sigma + (-1)^{2k+1} \omega_1 \wedge d\sigma = -\omega_1 \wedge d\sigma,$$

donc finalement $\omega_1 \wedge \omega_2 = d(-\omega_1 \wedge d\sigma)$ est exacte.

III. Calculer les nombres de Betti de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ pour $1 \leq n \leq m$.

On sait que $\mathrm{b}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 0$ si k est impair ou $k > 2n$ et $\mathrm{b}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 1$ si k est pair, compris entre 0 et $2n$. La formule de Künneth donne

$$\mathrm{b}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m) = \sum_{p+q=k} \mathrm{b}_p(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)\mathrm{b}_q(\mathbb{C}\mathrm{P}^m),$$

donc $\mathrm{b}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ est égal au nombre de couples ordonnés (p, q) qui vérifient $p \in \{0, 2, \ldots, 2n\}$, $q \in \{0, 2, \ldots, 2m\}$ et $p + q = k$. On trouve

$$\mathrm{b}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n \times \mathbb{C}\mathrm{P}^m) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair ou } k > 2(m+n) \\ 1 + \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair et } 0 \leq k < 2n \\ 1 + n & \text{si } k \text{ est pair et } 2n \leq k \leq 2m \\ 1 + m + n - \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair et } 2m < k \leq 2(m+n) \end{cases}$$

IV. Soit $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ définie par $f([z_0 : z_1]) = [z_0 : z_1 : 0]$. Montrer qu'il n'existe aucune application différentiable $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{id}$.

Supposons que g existe et soient $\alpha \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \simeq \mathbb{R}$ et $\beta \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^2) \simeq$ des générateurs. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $g^*\alpha = k\beta$. Comme $\alpha \wedge \alpha = 0$ (pour des raisons de dimension) on a

$$0 = g^*(\alpha \wedge \alpha) = (g^*(\alpha)) \wedge (g^*(\alpha)) = (k\beta) \wedge (k\beta) = k^2 \beta \wedge \beta.$$

Or $\beta \wedge \beta \neq 0$, donc $k = 0$ et par conséquent $g^*\alpha = 0$. D'autre part, comme $g \circ f = \mathrm{id}$ on a $\alpha = (g \circ f)^*(\alpha) = f^*(g^*\alpha) = 0$, contradiction. On remarque que le résultat reste vrai quelle que soit l'application f...

V. On considère le sous-ensemble $Q \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ défini par

$$Q := \left\{ [z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid \sum_{k=0}^{n} z_k^2 = 0 \right\}.$$

a) Montrer que l'ensemble Q est bien défini.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} z_k^2 = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} (\lambda z_k)^2 = 0.$$

b) Montrer que Q est une sous-variété compacte de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ et determiner sa dimension. *Indication : on pourra utiliser l'atlas standard de* $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Soit $U_i = \{z_i \neq 0\}_{0 \leq i \leq n}$ le recouvrement ouvert standard de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Il suffit de montrer que $Q \cap U_i$ est une sous-variété de $U_i \simeq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pour simplifier les notations on le vérifie pour $i = 0$. Dans la carte standard $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^n$, $Q \cap U_0$ s'identifie à $F^{-1}(0)$ où $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est donnée par $F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} z_k^2$. Il suffit de montrer que 0 est valeur régulière de F. En coordonnées réelles $z_k = x_k + iy_k$, F s'identifie à $G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$G(x, y) = (|x|^2 - |y|^2 + 1, 2\langle x, y\rangle), \qquad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 = \mathbb{R}^{2n}.$$

La différentielle de G en (x, y) est

$$dG_{(x,y)}(u, v) = 2(\langle x, u\rangle - \langle y, v\rangle, \langle x, v\rangle + \langle y, u\rangle).$$

Or, si $(x, y) \in G^{-1}(0)$, on a $dG_{(x,y)}(y, 0) = 2(0, |y|^2) = 2(0, 1 + |x|^2)$ et $dG_{(x,y)}(0, -y) = 2(|y|^2, 0) = 2(1 + |x|^2, 0)$, donc $dG_{(x,y)}$ est surjective. Q est donc une sous-variété de dimension $2n - 2$ de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. De plus, l'image réciproque de Q par la projection canonique $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est un ensemble fermé (préimage de 0 par une fonction polynomiale), donc Q est un fermé dans $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ pour la topologie quotient. Q est donc compacte.

c) On suppose à présent que n est impair, $n = 2m + 1$. Montrer qu'il existe une application linéaire injective $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ qui induit une application $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^m \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ dont l'image est contenue dans Q.

$f(z_0, \ldots, z_m) = (z_0, \ldots, z_m, iz_0, \ldots, iz_m)$.

d) Montrer que $g^* : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ est un isomorphisme pour tout k tel que $0 \leq k \leq m$.

Pour $k=0$ c'est évident, on suppose donc $m \geq 1$. Soit $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{m+1}$ l'application linéaire injective $(z_0, z_1) \mapsto (z_0, z_1, 0, \ldots, 0)$ et $v : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ l'application induite par u. D'après l'exercice 2 de la feuille 8, $v^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^m) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ et $(g \circ v)^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ sont des isomorphismes. Il résulte que $g^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ est un isomorphisme. Si $\alpha \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ est un générateur, on a donc que $\beta := g^*(\alpha)$ est un générateur de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Or, $g^*(\alpha^k) = \beta^k$, et d'après l'exercice 5, feuille 8, α^k et β^k sont des générateurs de $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ et $H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ respectivement, pour tout $k \leq m$.

e) En déduire que les nombres de Betti de Q vérifient $\mathrm{b}_{2k}(Q) \geq 1$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq n-1$. *Indication : commencer par le cas où $k \leq m$.*

On note $h : \mathbb{C}\mathrm{P}^m \to Q$ l'application g vue comme application dans Q et $j : Q \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'inclusion. On a donc $g = j \circ h$ et par conséquent $g^* = h^* \circ j^*$ en cohomologie. D'après d) $g^* : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^m)$ est bijective pour $k \leq m$, donc $j^* : H^{2k}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^{2k}(Q)$ est injective, ce qui montre que $\mathrm{b}_{2k}(Q) \geq 1$ pour tout k tel que $0 \leq k \leq m$. Pour $m < k \leq n-1$ on applique la dualité de Poincaré. En effet, Q est compacte et orientable (étant sous-variété complexe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$), donc $\mathrm{b}_{2k}(Q) = \mathrm{b}_{2n-2-2k}(Q) \geq 1$ car $0 \leq n-1-k = 2m-k < m$.

VI. Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq k \leq n-1$ et soit $S^k \subset \mathbb{R}^n$ la sphère

$$S^k := \{(x_1, \ldots, x_{k+1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_{k+1}^2 = 1\}.$$

a) Montrer que l'ouvert $U_{n,k} := \mathbb{R}^n \setminus S^k$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^k \cup \{P\})$, où P est un point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$. *Indication : on pourra utiliser des projections stéréographiques sur S^n. Il n'est pas nécessaire de faire des calculs explicites, on se contentera d'expliquer l'idée générale.*

$\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $S^n \setminus \{N\}$ par la projection stéréographique p_N, donc $U_{n,k}$ est difféomorphe à $S^n \setminus (\{N\} \cup p_N^{-1}(S^k))$. En choisissant un point E sur la sphère $p_N^{-1}(S^k)$, la projection stéréographique $p_E : S^n \setminus \{E\} \to \mathbb{R}^n$ envoie $p_N^{-1}(S^k) \setminus \{E\}$ sur un certain sous-espace $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, donc p_E définit un difféomorphisme entre $S^n \setminus (\{N\} \cup p_N^{-1}(S^k))$ et $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^k \cup \{p_E(N)\})$.

b) Calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,n-1}$.

D'après a), $U_{n,n-1}$ est difféomorphe à la réunion disjointe d'un demi-espace (difféomorphe à R^n) et d'un demi-espace privé d'un point (difféomorphe à $R^n \setminus \{0\}$). D'après le cours on a donc

$$H_c^k(U_{n,n-1}) = H_c^k(\mathbb{R}^n) \oplus H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } k=n \\ \mathbb{R} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,k}$ pour $k \leq n-2$ (on suppose ici que $n \geq 3$).

On identifie $U_{n,k}$ à $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^k \cup \{P\}) = U \cap V$ avec $U := \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ et $V := \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$. On a donc $U \cup V = \mathbb{R}^n$, $U \simeq \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1}$ et $V \simeq \mathbb{R} \times S^{n-1}$. D'après le cours on a donc

$$H_c^p(U \cup V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H_c^p(U) = H_c^{p-k-1}(S^{n-k-1}) = H^{p-k-1}(S^{n-k-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = n \text{ ou } p = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$H_c^p(V) = H_c^{p-1}(S^{n-1}) = H^{p-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = n \text{ ou } p = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $1 \leq p \leq n-1$ une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris s'écrit

$$0 = H_c^{p-1}(U \cup V) \to H_c^p(U \cap V) \to H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) \to H^p(U \cup V) = 0,$$

donc pour $1 \leq p \leq n-1$

$$H_c^p(U_{n,k}) = H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 1 \text{ ou } p = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $U_{n,k}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H_c^0(U_{n,k}) = 0$. Enfin, pour $p = n$ la suite exacte de Mayer-Vietoris donne

$$0 = H_c^{n-1}(U \cup V) \to H_c^n(U \cap V) \to H_c^n(U) \oplus H_c^n(V) \to H^n(U \cup V) \to 0,$$

donc

$$0 \to H_c^n(U_{n,k}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 0,$$

ce qui donne (en comptant la somme alternée des dimensions) $H_c^n(U_{n,k}) = \mathbb{R}$. Finalement

$$H_c^p(U_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 1,\ p = k+1 \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Soit $n' \geq 2$ un entier et $k' \in \{1, \ldots, n'-1\}$. Montrer que si $U_{n,k}$ est difféomorphe à $U_{n',k'}$ alors $n = n'$ et $k = k'$.

Si $U_{n,k}$ est difféomorphe à $U_{n',k'}$ alors $H_c^p(U_{n,k}) = H_c^p(U_{n',k'})$ pour tout p. D'après les calculs des points b) et c) on doit évidemment avoir $n = n'$ et $k = k'$.

e) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on suppose seulement que $U_{n,k}$ et $U_{n',k'}$ ont le même type d'homotopie ?

Si $U_{n,k}$ et $U_{n',k'}$ ont le même type d'homotopie leur cohomologie est la même en chaque degré. Or la dualité de Poincaré donne

$$H^p(U_{n,k}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = n-1,\ p = n-k-1 \text{ ou } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

si $k \leq n-2$ et

$$H^p(U_{n,n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } p = n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient facilement que si $H^p(U_{n,k}) = H^p(U_{n',k'})$ pour tout p alors $k = k'$ et $n = n'$. Le résultat du point d) reste donc vrai.