Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 10/12/2012 –

9h00 – 12h00

– Corrigé –

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. a) Soit M une variété connexe de type fini, orientable, de dimension $n \geq 1$, non-compacte. Montrer que $H^n(M) = 0$.

D'après la dualité de Poincaré on a $H^n(M) = (H_c^0(M))^*$. Or, M étant connexe, le support de toute fonction localement constante non-nulle est M tout entier, qui est non-compacte. On a donc $H_c^0(M) = 0$.

Soit A un sous-ensemble fini non-vide de la sphère S^n. On suppose $n \geq 2$ dans la suite de l'exercice.

b) Montrer que $S^n \setminus A$ est connexe.

Si $A = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $S^n \setminus A$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$ qui est clairement connexe par arcs.

c) Montrer que $\mathrm{b}_{n-1}(S^n \setminus A) = |A| - 1$, où $|A|$ désigne le cardinal de A et $\mathrm{b}_{n-1} := \dim(H^{n-1})$ est le $(n-1)$-ème nombre de Betti.

Soit $A = \{p_1, \ldots, p_k\}$. On prend des voisinages disjoints $U_1, \ldots, U_k$ de $p_1, \ldots, p_k$ respectivement, tels que chaque U_i soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On note U leur réunion et $V = S^n \setminus A$. On a clairement $S^n = U \cup V$ et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'une union disjointe de k

copies de S^{n-1}. La suite exacte de Mayer-Vietoris

$0 = H^{n-1}(S^n) \to H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \to H^{n-1}(U \cap V) \to H^n(S^n) \to H^n(U) \oplus H^n(V) = 0$

donne alors

$$0 = \mathrm{b}_{n-1}(U) + \mathrm{b}_{n-1}(V) - \mathrm{b}_{n-1}(U \cap V) + \mathrm{b}_n(S^n) = \mathrm{b}_{n-1}(S^n \setminus A) - k + 1.$$

d) Montrer que $S^n \setminus A$ a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable si et seulement si $|A| \leq 2$.

Si le cardinal de A est 1 ou 2, $S^n \setminus A$ a le type d'homotopie d'un point ou de S^{n-1} respectivement. Supposons à présent $k \geq 3$. En raisonnant par l'absurde, soit N une variété compacte orientable qui a le même type d'homotopie que $S^n \setminus A$. Alors on a:

- $\mathrm{b}_0(N) = \mathrm{b}_0(S^n \setminus A) = 1$ (d'après b).
- $\mathrm{b}_{n-1}(N) = \mathrm{b}_{n-1}(S^n \setminus A) = k - 1$ (d'après c).
- $\mathrm{b}_n(N) = \mathrm{b}_n(S^n \setminus A) = 0$ (d'après a).
- pour $m > n$, $\mathrm{b}_m(N) = \mathrm{b}_m(S^n \setminus A) = 0$ (pour des raisons de dimension).

La dualité de Poincaré nous dit en particulier que

$$\dim(N) = \max\{j \mid \mathrm{b}_j(N) \neq 0\}.$$

D'après ce qui précède, on doit avoir $\dim(N) = n - 1$. De plus, on doit avoir $\mathrm{b}_{n-1}(N) = \mathrm{b}_0(N)$, ce qui donne $k - 1 = 1$, une contradiction.

II. Soit M une variété connexe de dimension $n \geq 2$ et $x \in M$ un point quelconque. Montrer que M est orientable si et seulement si $M \setminus \{x\}$ est orientable.

Un sens est clair. Réciproquement, supposons que $M \setminus \{x\}$ est orientable et soit (U_i, φ_i) un atlas de M. Alors $(U_i \setminus \{x\}, \varphi_i)$ est un atlas de $M \setminus \{x\}$, or on sait d'après le cours que tout atlas de $M \setminus \{x\}$ est redressable. Soit $(U_i \setminus \{x\}, \tilde{\varphi}_i)$ un atlas redressé de $M \setminus \{x\}$, ce qui veut dire que le jacobien de $\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ est positif sur son ensemble de définition $\tilde{\varphi}_j(U_i \cap U_j \setminus \{x\})$. Par continuité, ce jacobien est positif aussi sur $\tilde{\varphi}_j(U_i \cap U_j)$, donc l'atlas $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$ est un atlas orienté de M.

Deuxième solution. Soit ω une n-forme de classe C^∞ sur $M \setminus \{x\}$ qui ne s'annule jamais et soit (U, φ) une carte contenant x avec U difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Sur U on définit la n-forme

$\tau := \varphi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$ qui ne s'annule jamais. Sur l'ouvert connexe $U \setminus \{x\}$ on a $\tau = h\sigma$ pour une certaine fonction h qui ne s'annule pas. Alors h est de signe constant, et, quitte à changer ω en $-\omega$, on peut supposer $h > 0$. Soit $\alpha + \beta = 1$ une partition de l'unité avec $supp(\alpha) \in U$ et $supp(\beta) \in M \setminus \{x\}$. La forme $\alpha\tau + \beta\omega$ est alors de classe C^∞ sur M et ne s'annule jamais.

III. On rappelle que si M est une variété connexe compacte orientable de dimension $n \geq 1$, et $f : M \to M$ est une fonction de classe C^∞, le degré de f est l'unique nombre réel qui vérifie

$$f^*(x) = \deg(f)x, \qquad \forall\, x \in H^n(M).$$

a) Vérifier qu'il existe une fonction $c_n : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ de classe C^∞ telle que

$$c_n([z_0 : \ldots : z_n]) = [\bar{z}_0 : \ldots : \bar{z}_n], \qquad \forall\, (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Évident, car si on remplace chaque z_i par λz_i alors

$$[\overline{\lambda z_0} : \ldots : \overline{\lambda z_n}] = [\bar{\lambda}\bar{z}_0 : \ldots : \bar{\lambda}\bar{z}_n] = [\bar{z}_0 : \ldots : \bar{z}_n].$$

b) Montrer que $c_1^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ est la multiplication par -1.

On sait que $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe à S^2 (Exercice 6, Feuille 7). Par ce difféomorphisme, la conjugaison complexe c_1 correspond à une symétrie hyperplane s. Or, on sait que s^* est la multiplication par -1 dans $H^2(S^2)$ (Exercice 4, Feuille 5).

c) Soit $j : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'inclusion définie par $j([z_0, z_1]) = [z_0 : z_1 : 0 : \ldots : 0]$. Montrer que $j^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ est un isomorphisme.

D'après l'Exercice 2c), Feuille 8, on sait que l'inclusion $i : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ définie par

$$i([x_0 : \ldots : x_{n-1}]) = [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]$$

induit un isomorphisme $i^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$. Par récurrence immédiate on a le résultat demandé.

d) En déduire que $c_n^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ est la multiplication par -1, puis $\deg(c_n) = (-1)^n$.

On a $c_n \circ j = j \circ c_1$, donc $j^* \circ c_n^* = c_1^* \circ j^* = -j^*$, et comme j^* est un isomorphisme, on obtient $c_n^* = -\mathrm{id}$.

e) Montrer que le degré d'une fonction $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}$ de classe C^∞ est toujours positif ou nul.

Soit $y \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n})$ un générateur. On sait que $x := y^{2n}$ est un générateur de $H^{4n}(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n})$. Comme $\dim(H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}) = 1$, il existe un nombre réel a tel que $f^*(y) = ay$. Alors $f^*(x) = f^*(y^{2n}) = (ay)^{2n} = a^{2n}x$. Par conséquent, $\deg(f) = a^{2n} \geq 0$.

Remarque: D'après ce qui précède, ce résultat n'est pas valable pour $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1}$.

IV. Dans cet exercice M est une variété de type fini connexe de dimension $n \geq 2$ avec $H^1(M) = 0$ et $f : M \times M \to M$ est une fonction de classe C^∞ possédant un "élément neutre", c'est-à-dire un point $e \in M$ tel que $f(p,e) = f(e,p) = p$ quel que soit $p \in M$. Le but de l'exercice est de montrer que $H^2(M) = 0$.

a) Soient $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ les projections canoniques. Montrer que $H^2(M \times M) = \pi_1^*(H^2(M)) \oplus \pi_2^*(H^2(M))$.

Résulte directement de la formule de Künneth

$$H^2(M\times M) = \pi_1^*(H^2(M))\otimes\pi_2^*(H^0(M))\oplus\pi_1^*(H^1(M))\otimes\pi_2^*(H^1(M))\oplus\pi_1^*(H^0(M))\otimes\pi_2^*(H^2(M)),$$

En utilisant le fait que $H^1(M) = 0$ et que le produit tensoriel par $H^0(M) = \mathbb{R}$ est l'identité.

b) Soient $j_1, j_2 : M \to M \times M$ définies par $j_1(p) = (p,e)$, $j_2(p) = (e,p)$. Expliciter les endomorphismes $j_1^* \circ \pi_1^*$, $j_1^* \circ \pi_2^*$, $j_2^* \circ \pi_1^*$ et $j_2^* \circ \pi_2^*$ de $H^2(M)$.

Comme $\pi_1 \circ j_1 = \pi_1 \circ j_1 = \mathrm{id}$, on a $j_1^* \circ \pi_1^* = j_2^* \circ \pi_2^* = \mathrm{id}$. Enfin, les applications $\pi_2 \circ j_1$ et $\pi_1 \circ j_2$ sont constantes, donc $j_2^* \circ \pi_1^* = j_1^* \circ \pi_2^* = 0$.

c) Montrer que pour tout $a \in H^2(M)$ on a $f^*(a) = b + c$, où $b := \pi_1^*(a)$ et $c := \pi_2^*(a)$.

D'après a) on sait qu'il existe $a_1, a_2 \in H^2(M)$ tels que $f^*(a) = \pi_1^*(a_1) + \pi_2^*(a_2)$. Comme $f \circ j_1 = \mathrm{id}$, le point précédent donne $a = j_1^*(f^*(a)) = j_1^*(\pi_1^*(a_1) + \pi_2^*(a_2)) = a_1$. De même, en composant avec j_2^* on trouve $a = a_2$.

d) Si $a \in H^2(M)$ est non-nul montrer qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $a^{k-1} \neq 0$ et $a^k = 0$ [*Rappel:* on note a^k le produit extérieur $a \wedge a \wedge \ldots \wedge a$ (k fois)].

L'ensemble des entiers l tels que $a^l = 0$ est non-vide (car il contient tous les entiers strictement supérieurs à la moitié de la dimension de M) et ne contient pas 1. On prend k l'élément minimal de cet ensemble.

e) En utilisant la formule de Künneth, montrer que les éléments $b^i \wedge c^{k-i}$, $1 \leq i \leq k-1$, sont linéairement indépendants dans $H^{2k}(M \times M)$.

La formule de Künneth dit que les images dans $H^{2k}(M \times M)$ des espaces $\pi_1^*(H^{2i}(M)) \times \pi_2^*(H^{2k-2i}(M))$ sont en somme directe. Or, pour tout i entre 1 et $k-1$, $b^i \otimes c^{k-i}$ est non-nul, et son image dans $H^{2k}(M \times M)$ est $b^i \wedge c^{k-i}$. On a donc des éléments non-nuls dans des espaces en somme directe, ces éléments sont par conséquent linéairement indépendants.

f) Montrer que $H^2(M) = 0$.

En raisonnant par l'absurde, si $H^2(M) \neq 0$, on choisit $a \in H^2(M)$ non-nul et d'après c) en a $f^*(a) = b + c$, où $b := \pi_1^*(a)$ et $c := \pi_2^*(a)$. Avec les notations de d) on a

$$0 = f^*(a^k) = (b+c)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} b^i \wedge c^{k-i},$$

pour un certain $k \geq 2$. Or, $b^k = \pi_1^*(a^k) = 0$ et similairement $c^k = 0$. On a donc une contradiction avec e).

g) Le résultat reste-t-il vrai sans l'hypothèse $H^1(M) = 0$?

Non, par exemple le tore $T^2 := S^1 \times S^1$ a une structure de groupe de Lie, donc le produit

$$T^2 \times T^2 \to T^2, \qquad ((z_1, z_2), (z_3, z_4)) \mapsto (z_1 z_3, z_2 z_4)$$

est une application de classe C^∞ avec "élément neutre" $e = (1, 1)$.

D'autre part, $H^2(T^2) = \mathbb{R}$ car T^2 est une variété connexe compacte de dimension 2 (ou en utilisant Künneth).