Topologie différentielle

– Examen du 05/12/2011 –

9h00 – 12h00

– Corrigé –

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les exercices sont indépendants.

I. a) Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid xt - yz = 1 \right\}$$

est une sous-variété de dimension 3 de $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$ où $F : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est donnée par $F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xt - yz - 1$. Il faut vérifier que 0 est valeur régulière de F pour pouvoir appliquer le résultat du cours. Si $A := \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F^{-1}(0)$, on a $dF_A \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} = xt' + x't - yz' - y'z$ et donc dF_A est surjective car $A \neq 0$.

b) Si $i : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ désigne l'inclusion, montrer que les 1-formes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ $i^*(t\,dx + x\,dt)$ et $i^*(y\,dz + z\,dy)$ sont égales.

Avec la fonction F introduite précédemment on peut écrire:

$$i^*(t\,dx + x\,dt) - i^*(y\,dz + z\,dy) = i^*(dF) = d(F \circ i) = d(0) = 0.$$

II. a) Soient M et N deux variétés différentiables compactes de dimension m et n respectivement. À l'aide de la Formule de Künneth, déterminer le nombre de Betti d'indice maximal $\mathrm{b}_{m+n}(M \times N)$ en fonction des nombres de Betti de M et de N.

$$\mathrm{b}_{m+n}(M \times N) = \sum_{p+q=m+n} \mathrm{b}_p(M) \cdot \mathrm{b}_q(N) = \mathrm{b}_m(M) \cdot \mathrm{b}_n(N)$$

car dans la somme tous les termes où $p > m$ ou $q > n$ sont nuls.

b) Montrer que la variété différentiable $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^2$ n'est pas orientable.

La variété $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^2$ est compacte. Si elle était orientable, on aurait $\mathrm{b}_4(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^2) = 1$ d'après la dualité de Poincaré. Cependant $\mathrm{b}_4(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times S^2) = \mathrm{b}_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cdot \mathrm{b}_2(S^2) = 0 \cdot 1 = 0$.

c) En examinant l'espace $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \setminus \{x\}$, donner un exemple de variété orientable ayant le même type d'homotopie qu'une variété non-orientable.

$\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \setminus \{x\}$ est orientable car $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ est orientable. Comme pour le projectif complexe (exercice du cours) on vérifie que $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \setminus \{x\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, qui n'est pas orientable.

III. a) Soit M une variété différentiable connexe, orientable, de dimension n. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

1. M est compacte.
2. $H^n(M) \neq 0$.
3. $H^n(M) = \mathbb{R}$.

1. $\Longrightarrow$ 3. d'après la dualité de Poincaré et 3. $\Longrightarrow$ 2. de manière évidente. On montre 2. $\Longrightarrow$ 1. par la contraposée. Supposons que M n'est pas compacte. Tout élément de $H^0_c(M)$ est représenté par une fonction localement constante (donc constante car M est connexe), et à support compact. Or le support d'une fonction constante non-nulle est M tout entier, donc $H^0_c(M) = 0$. Par la dualité de Poincaré on a donc $H^n(M) = (H^0_c(M))^* = 0$.

b) Montrer que deux variétés compactes orientables qui ont le même type d'homotopie ont la même dimension.

Supposons que M^m a le type d'homotopie de N^n et $m < n$. Alors elles ont les mêmes groupes de cohomologie. D'autre part, $H^n(M) = 0$ et $H^n(N) = \mathbb{R}^k$ où k est le nombre de composantes connexes de N.

IV. a) Soit N variété différentiable de dimension n. Calculer les nombres de Betti de $S^1 \times N$ en fonction des nombres de Betti de N.

La Formule de Künneth donne directement $\mathrm{b}_0(S^1 \times N) = 1$, $b_k(S^1 \times N) = \mathrm{b}_k(N) + \mathrm{b}_{k-1}(N)$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\mathrm{b}_{n+1}(S^1 \times N) = 1$.

b) Donner un exemple de variété différentiable M, compacte, orientable, de dimension $2n+1$, dont les nombres de Betti sont tous égaux à 1: $\mathrm{b}_k(M) = 1$, $\forall\, k \in \{0, \ldots, 2n+1\}$.

$S^1 \times \mathbb{C}\mathrm{P}^n$

c) Montrer qu'il n'existe aucune variété différentiable compacte orientable de dimension $4n+2$ ayant tous nombres de Betti égaux à 1.

D'après le cours, le nombre de Betti médian b_{2n+1} d'une variété de dimension $4n+2$ est pair.

V. Soit P une variété différentiable connexe compacte orientable de dimension $n \geq 2$

et $x \in P$ un point arbitraire.

a) Montrer que $P \setminus \{x\}$ est connexe.

Soit U un voisinage de x dans P difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Comme $U \setminus \{x\}$ est connexe par arcs, il suffit de montrer que tout point de $M \setminus \{x\}$ peut être joint à un point de $U \setminus \{x\}$ par un chemin qui ne passe pas par x. Soit $y \in M \setminus \{x\}$. Comme M est connexe (et donc connexe par arcs), il existe $\gamma : [0,1] \to M$ continu avec $\gamma(0) = y$ et $\gamma(1) = x$. Alors $\gamma^{-1}(x)$ est un compact de $[0,1]$, dont on note la borne inférieure par a. Comme $\gamma^{-1}(U)$ est un ouvert de $[0,1]$ qui contient a, il existe $b < a$ dans $\gamma^{-1}(U)$. Alors la restriction de γ à $[0,b]$ est un chemin continu qui relie y à $\gamma(b) \in U$.

b) Plus généralement, montrer en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris que l'inclusion $i : P \setminus \{x\} \to P$ induit un isomorphisme $i^* : H^k(P) \to H^k(P \setminus \{x\})$ pour tout $k \leq n-1$. On traitera avec une attention particulière le cas où $k = n-1$.

On utilise le recouvrement ouvert de M par U et $V := M \setminus \{x\}$ avec $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de S^{n-1}. Considérons d'abord le cas $n = 2$. Compte tenu du fait que $H^2(M) = \mathbb{R}$ et $H^2(U) = H^2(V) = 0$ (exercice 3.a)), la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 \to H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(M) \to H^1(U) \oplus H^1(V)$$

$$\to H^1(U \cap V) \to H^2(M) \to H^2(U) \oplus H^2(V)$$

s'écrit

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to H^1(M) \xrightarrow{i^*} H^1(M \setminus \{x\}) \to \mathbb{R} \xrightarrow{\partial} \mathbb{R} \to 0.$$

Comme la somme alternée des dimensions est nulle, on trouve que $H^1(M)$ et $H^1(M \setminus \{x\})$ ont la même dimension. De plus, la fin de cette suite exacte donne la surjectivité de l'application ∂, qui est donc injective. L'image de l'application précédente est donc nulle, et par conséquent i^* est surjective, donc bijective d'après l'égalité des dimensions.

Pour $n \geq 3$ la suite exacte de Mayer-Vietoris commence par

$$0 \to H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(M) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V)$$

ce qui s'écrit

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to H^1(M) \xrightarrow{i^*} H^1(M \setminus \{x\}) \to 0,$$

donc $i^* : H^1(M) \to H^1(M \setminus \{x\})$ est surjective. De plus, comme la somme alternée des dimensions est nulle, on trouve que $H^1(M)$ et $H^1(M \setminus \{x\})$ ont la même dimension, donc i^* est un isomorphisme.

Pour $2 \leq k \leq n-2$ on a $H^{k-1}(S^{n-1}) = H^k(S^{n-1}) = H^k(U) = 0$, donc la suite exacte de Mayer-Vietoris donne directement l'isomorphisme

$$0 \to H^k(M) \xrightarrow{i^*} H^k(M \setminus \{x\}) \to 0.$$

Enfin, pour $k = n-1$, comme $H^n(M) = \mathbb{R}$ et $H^n(U) = H^n(V) = 0$ (exercice 3.a)) la suite exacte de Mayer-Vietoris donne

$$0 \to H^{n-1}(M) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(M \setminus \{x\}) \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 0,$$

ce qui montre comme précédemment que i^* est un isomorphisme.

On appelle $\mathcal{M}_d(n)$ l'ensemble des variétés différentiables connexes compactes P de dimension n avec la propriété que $P \setminus \{x\}$ a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable de dimension $n-d$.

c) Si $P \in \mathcal{M}_d(n)$, montrer que $d \geq 1$, n est multiple de d et que les nombres de Betti de P vérifient

$$\mathrm{b}_k(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ divise } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indication: Montrer d'abord que $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = \mathrm{b}_{n-d-i}(P \setminus \{x\})$ pour $0 \leq i \leq n-d$, et $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = 0$ pour $n-d+1 \leq i \leq n-1$, puis utiliser le point b) et la dualité de Poincaré pour P afin d'obtenir des relations entre les nombres de Betti de P.

Si $d = 0$, $P \setminus \{x\}$ a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable connexe de dimension n, donc $H^n(P \setminus \{x\}) = \mathbb{R}$, ce qui contredit 3.a). Donc $d \geq 1$. Comme $P \setminus \{x\}$ a le type d'homotopie d'une variété compacte orientable de dimension $n-d$, $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = 0$ pour $n-d+1 \leq i \leq n-1$ et par la dualité de Poincaré $\mathrm{b}_i(P \setminus \{x\}) = \mathrm{b}_{n-d-i}(P \setminus \{x\})$ pour $0 \leq i \leq n-d$. D'après b) on obtient $\mathrm{b}_i(P) = \mathrm{b}_{n-d-i}(P)$ pour $0 \leq i \leq n-d$ et $\mathrm{b}_i(P) = 0$ pour $n-d+1 \leq i \leq n-1$. En utilisant à présent la dualité de Poincaré pour P on trouve

$$\mathrm{b}_i(P) = \mathrm{b}_{d+i}(P) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-d, \qquad \mathrm{b}_i(P) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq d-1. \qquad (*)$$

Soit $n = dk + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$. Si $r > 0$ on obtient $0 = \mathrm{b}_r(P) = \mathrm{b}_{r+d}(P) = \ldots = \mathrm{b}_{r+kd}(P) = 1$, contradiction. Donc $r = 0$ et (*) donne $1 = \mathrm{b}_0(P) = \mathrm{b}_d(P) = \ldots = \mathrm{b}_{dk}(P)$ et $0 = \mathrm{b}_i(P) = \mathrm{b}_{i+d}(P) = \ldots = \mathrm{b}_{i+(k-1)d}(P)$ pour $1 \leq i \leq d-1$.

Dans la suite de l'exercice on se propose de montrer que si un produit de deux variétés compactes orientables $M \times N$ appartient à $\mathcal{M}_d(n)$ alors une des variétés M ou N est réduite à un point. On note p_M et p_N les projections de $M \times N$ sur M et N.

d) On suppose que M et N sont deux variétés compactes orientables avec $p := \dim(M) \geq 1$, $q := \dim(N) \geq 1$ telles que $P := M \times N \in \mathcal{M}_d(n)$, où $n = p + q$. Montrer, à l'aide de la Formule de Künneth et du point c), que $\mathrm{b}_i(M) = 0 = \mathrm{b}_i(N)$ pour tous $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ et que $\mathrm{b}_d(M) + \mathrm{b}_d(N) = 1$.

Si $d = 1$ la Formule de Künneth donne $1 = \mathrm{b}_1(P) = \mathrm{b}_1(M) + \mathrm{b}_1(N)$. Si $d \geq 2$ on montre par récurrence forte sur $1 \leq i < d$ que $\mathrm{b}_i(M) = \mathrm{b}_i(N) = 0$. Pour $i = 1$ la Formule de Künneth donne $0 = \mathrm{b}_1(P) = \mathrm{b}_1(M) + \mathrm{b}_1(N)$ donc les deux nombres de Betti sont nuls. Soit $2 \leq i < d$. En utilisant (*) et Künneth une nouvelle fois on trouve

$$0 = \mathrm{b}_i(P) = \sum_{p+q=i} \mathrm{b}_p(M) \cdot \mathrm{b}_q(N).$$

Tous les termes dans cette somme à l'exception du premier et du dernier sont nuls d'après l'hypothèse de récurrence. On trouve donc $0 = \mathrm{b}_i(P) = \mathrm{b}_i(M) + \mathrm{b}_i(N)$ pour tout i entre 1 et $d-1$, ce qui prouve la récurrence. Pour $i = d$, la Formule de Künneth donne alors $1 = \mathrm{b}_d(P) = \mathrm{b}_d(M) + \mathrm{b}_d(N)$

En échangeant les rôles de M et N si nécessaire, on peut donc supposer dans la suite de l'exercice que $\mathrm{b}_d(M) = 1$ *et* $\mathrm{b}_d(N) = 0$.

e) Montrer que $p \geq d$ et $q > d$.

$\mathrm{b}_d(M) = 1$, donc la dimension de M est au moins égale à d. D'après ce qui précède les nombres de Betti de N sont tous nuls entre 1 et d et comme $\mathrm{b}_q(N) = 1$ et N n'est pas réduit à un point (donc $q \geq 1$), on a $q > d$.

f) Soit α un générateur de $H^p(M) \simeq \mathbb{R}$ et $\beta := i^*((p_M)^*(\alpha)) \in H^p(P \setminus \{x\})$. Montrer l'existence d'un élément $\gamma \in H^{q-d}(P \setminus \{x\})$ tel que $\beta \wedge \gamma \neq 0$.

D'après Künneth, $(p_M)^*(\alpha) \neq 0$ dans $H^p(P)$. Comme i^* est bijective, β est donc non-nul. La dualité de Poincaré pour la variété compacte orientée de dimension $n-d = p+q-d$ ayant le type d'homotopie de $P \setminus \{x\}$ prouve l'existence d'un élément

$$\gamma \in H^{(n-d)-p}(P \setminus \{x\}) = H^{q-d}(P \setminus \{x\})$$

avec $\beta \wedge \gamma \neq 0$.

g) En déduire l'existence d'un élément $\delta \in H^{q-d}(P)$ tel que $(p_M)^*(\alpha) \wedge \delta \neq 0$.

Comme i^* est bijective, on peut prendre $\delta = (i^*)^{-1}(\gamma)$.

h) Exprimer δ à l'aide de la Formule de Künneth et montrer que $(p_M)^*(\alpha) \wedge \delta = 0$. Conclure.

On a

$$\delta = \sum_{i+j=q-d} (p_M)^*(\alpha_i) \wedge (p_N)^*(\beta_j)$$

pour certains $\alpha_i \in H^i(M)$ et $\beta_j \in H^j(N)$. Comme $\alpha \wedge \alpha_i = 0$ pour $i \geq 1$ (pour des raisons de dimension, α étant de degré maximal) on trouve $(p_M)^*(\alpha) \wedge \delta = (p_M)^*(\alpha \wedge \alpha_0) \wedge (p_N)^*(\beta_{q-d})$. Cependant β_{q-d} est nul car $H^{q-d}(N) = 0$. On a donc une contradiction qui montre que une des variétés M ou N est réduite à un point.

i) Montrer que l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ n'est pas difféomorphe au produit de deux variétés orientables non-réduites à un point.

On sait d'après le cours que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \in \mathcal{M}_2(2n)$. On peut donc appliquer ce qui précède.