Mathématiques **MAT 553**

Topologie différentielle

– Examen du 13/12/2010 –

– Corrigé –

Tous les documents, y compris les notes de cours et de PC, sont autorisés. Les 6 exercices sont indépendants.

I. Montrer que les variétés différentiables de dimension 6, $S^2 \times S^4$ et $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$, ne sont pas difféomorphes.

Les groupes de cohomologie des deux variétés sont les mêmes, il faut donc regarder les structures d'algèbre (car si f est difféomorphisme, alors f^* est un isomorphisme entre les algèbres de cohomologie). On sait (PC9) que le générateur x de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^3)$ satisfait $x^2 \neq 0$. D'autre part, le Théorème de Künneth montre que $H^2(S^2 \times S^4)$ est engendré par $p_1^*(y)$, où p_1 est la projection sur le premier facteur et y est le générateur de $H^2(S^2)$. On a donc $p_1^*(y)^2 = p_1^*(y^2) = p_1^*(0) = 0$.

II. Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Une 2-forme différentielle ω sur M est dite *non-dégénérée* si

$$\omega^n := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ fois}} \in \Omega^{2n} M$$

est non-nulle en chaque point de M. Une 2-forme différentielle sur M est dite *symplectique* si elle est non-dégénérée et fermée.

On suppose dans cet exercice que M est connexe, compacte et admet une 2-forme non-dégénérée ω.

1. Montrer que M est orientable.

D'après le cours, M est orientable car ω^n est une forme de degré maximal non-nulle en chaque point.

2. Montrer que

$$\int_M \omega^n \neq 0$$

quelle que soit l'orientation choisie sur M pour définir l'intégrale.

Soit (U_i, φ_i) un atlas orienté de M, avec U_i connexes et $m := 2n$. On a $(\varphi_i^{-1})^*(\Omega) = f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$. Les fonctions f_i sont de signe constant sur $\varphi_i(U_i)$. Pour montrer que le signe est le même pour chaque i il fallait utiliser la connexité de M. Comme l'atlas est orienté, pour chaque $x \in M$ le signe de $f_i(\varphi_i(x))$ est le même quel que soit i tel que $x \in U_i$. Les ensembles M^+ (M^-) des points x pour lesquels se signe est positif (respectivement négatif) sont clairement ouverts dans M. Les fonctions f_i sont donc toutes du même signe (disons positif). Si α_i est une partition de l'unité adaptée à U_i on a

$$\int_M \Omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} ((\alpha_i \circ \varphi_i^{-1}) f_i) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m > 0.$$

Dans la suite de l'exercice on suppose que ω est une 2-forme symplectique sur M.

3. Montrer que $H^{2k}(M) \neq 0$ quel que soit l'entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

On a tout d'abord $[\omega^n] \neq 0$ dans $H^{2n}(M)$. En effet, d'après le théorème de Stokes, s'il existe $\sigma \in \Omega^{2n-1}(M)$ avec $d\sigma = \omega^n$ alors $\int_M \omega^n = 0$, ce qui contredit 2. On vérifie ensuite par récurrence que ω^k est une forme fermée pour tout k, et comme $[\omega^k] \wedge [\omega^{n-k}] = [\omega^n]$, on a $[\omega^k] \neq 0$ dans $H^{2k}(M)$.

4. Pour quels entiers $n \geq 1$ existe-t-il une 2-forme symplectique sur la sphère S^n? Justifier.

D'après 3, une condition nécessaire est $H^2(S^n) \neq 0$. Ceci implique $n = 2$. Réciproquement, S^2 est orientable donc admet une 2-forme non-dégénérée, qui est automatiquement fermée pour des raisons de dimension.

III. Soit M une variété différentielle de type fini et de dimension n. On rappelle que la caractéristique d'Euler de M est définie par

$$\chi(M) := \sum_{p=0}^{\dim(M)} (-1)^p \dim(H^p(M)).$$

1. Montrer qu'au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée:

a) n est pair.

b) M est non-compacte.

c) M est non-orientable.

d) $\chi(M) = 0$.

Une variété qui ne vérifie pas les 3 premières conditions est compacte, orientable et de dimension impaire. L'exercice 4 de la Feuille 9 montre alors que $\chi(M) = 0$.

2. Pour chacune des quatre conditions ci-dessus, donner un exemple de variété différentiable de type fini qui satisfait cette condition et pas les trois autres.

Une variété qui satisfait uniquement la condition:

a) S^2;

b) $\mathbb{R}$;

c) n'existe pas;

d) S^1.

IV. Soit M une variété différentiable de dimension n et soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M. On rappelle que pour tout $i \in I$ et $x \in U_i$, il existe un isomorphisme, que l'on notera $\xi_{i,x}$, entre T_xM et $\mathbb{R}^n$ ($\xi_{i,x} = \psi_i^{-1}$ dans les notations du cours). On note $V_i := \sqcup_{x\in U_i} T_xM$ et on définit la bijection

$$\xi_i : V_i \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$$

par $\xi_i|_{T_xM} = \xi_{i,x}$.

1. Montrer que $(V_i, \xi_i)_{i\in I}$ est un atlas différentiable sur TM (on admettra l'existence d'une topologie sur TM telle que pour chaque $i \in I$, V_i est un ouvert et ξ_i est un homéomorphisme).

Il suffit de vérifier que $\xi_j \circ \xi_i^{-1}$ est un difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ et $\varphi_j(U_j) \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$. D'après les formules du cours on a

$$\xi_j \circ \xi_i^{-1}(y, v) = (d\varphi_{ij})_y(v).$$

où $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Cette application est clairement C^∞, et son inverse aussi (cela revient à échanger les rôles de i et j).

Considérons à présent la sous-variété $M := \mathrm{O}(n)$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ {}^tAA = I_n\}.$$

2. Determiner, pour chaque $A \in \mathrm{O}(n)$, l'espace tangent $T_A\mathrm{O}(n)$, vu comme sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathrm{O}(n) = F^{-1}(0_n)$ où $F : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ est donnée par $F(A) = {}^tAA - I_n$, et 0_n est valeur régulière de F. D'après le cours on a donc

$$T_A\mathrm{O}(n) = \ker(dF_A) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ {}^tXA + {}^tAX = 0_n\}.$$

3. Pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$ on définit l'automorphisme L_A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $L_A(X) := AX$. Montrer que la restriction de L_A à $T_{I_n}\mathrm{O}(n)$ est un isomorphisme sur $T_A\mathrm{O}(n)$.

Évident d'après ce qui précède.

4. Montrer que le fibré tangent $T\mathrm{O}(n)$ est difféomorphe à $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{A}(n)$, où $\mathrm{A}(n)$ désigne l'espace vectoriel des matrices anti-symétriques réelles.

On définit $F : \mathrm{O}(n) \times \mathrm{A}(n) \to T\mathrm{O}(n)$ par $F(A, X) = AX$. F est clairement bijective et $F^{-1}(Y) = (A, A^{-1}Y)$ pour tout $Y \in T_A\mathrm{O}(n)$. Pour vérifier la différentiabilité de F et F^{-1} il faut comprendre la structure de variété de $\mathrm{O}(n)$.

Comme $\mathrm{O}(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$, pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$ il existe un voisinage ouvert $\tilde{U}_i$ de A dans $M_n(\mathbb{R})$ et un difféomorphisme $\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \to V_i \subset M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i \cap \mathrm{O}(n)) = V_i \cap \mathrm{A}(n).$$

On note $U_i = \tilde{U}_i \cap \mathrm{O}(n)$ et φ_i la restriction de $\tilde{\varphi}_i$ à U_i. Avec les notation du point 1, $\varphi_i \times \mathrm{id}$ est une carte locale de $\mathrm{O}(n) \times \mathrm{A}(n)$ et ξ_i est une carte locale de $T\mathrm{O}(n)$. Comme $\xi_i(Y) = (d\tilde{\varphi}_i)_A(Y)$ pour tout $Y \in T_A\mathrm{O}(n)$, on peut écrire pour tout $B = \varphi_i(A)$:

$$\xi_i \circ F \circ (\varphi_i, \mathrm{id})^{-1}(B, X) = \xi_i \circ F(A, X) = \xi_i(AX) = (d\tilde{\varphi}_i)_A(AX)$$

donc F est C^∞. On montre de même que F^{-1} est C^∞.

Note: Je n'attendais pas ce raisonnement en détail, mais un peu plus tout de même que la simple définition de F et F^{-1}.

V. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-ensembles suivants:

- Le cercle $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ z = 0, \ x^2 + y^2 = 1\}$.
- L'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$.

- Le tore plein ouvert

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x^2+y^2 \neq 0, \ d\Big((x,y,z), \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\Big)\Big) < \frac{1}{2}\right\}.$$

1. Montrer que V est difféomorphe à $S^1 \times D$, où D désigne le disque unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Un difféomorphisme explicite peut s'écrire

$$(x,y,z) \overset{F}{\mapsto} \Big(\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big), 2(\sqrt{x^2+y^2}-1, z)\Big).$$

Pour vérifier la différentiabilité il faut composer F avec les cartes standard de S^1 qui sont données par les projections stéréographiques. On a par exemple

$$((\pi_N \times \mathrm{id}) \circ F)(x,y,z) = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-y}, 2(\sqrt{x^2+y^2}-1, z)\Big),$$

qui est clairement C^∞ sur son domaine de définition.

2. Montrer que $V \setminus S^1$ est difféomorphe à $S^1 \times (D \setminus \{0\})$.

Résulte immédiatement du fait que si M et N sont difféomorphes par F et $U \subset M$ est ouvert alors U et $F(U)$ sont difféomorphes.

3. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris pour les ouverts U et V, calculer les groupes de cohomologie $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$ et $H_c^*(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$.

Premièrement $H^0(U) = \mathbb{R}$ car U est connexe. Comme $U \cup V = \mathbb{R}^3$, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq H^k(U \cap V)$ quel que soit $k \geq 1$. D'autre part, les questions 1. et 2. montrent que V a le type d'homotopie de S^1 et $U \cap V$ a le type d'homotopie de $S^1 \times S^1$, donc d'après la formule de Künneth $H^1(U\cap V) = \mathbb{R}^2$, $H^2(U \cap V) = \mathbb{R}$ et $H^k(U \cap V) = 0$ pour $k \geq 3$. On obtient finalement

$$H^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0,1,2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

et grâce à la dualité de Poincaré

$$H_c^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 1,2,3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

VI. 1. Rappeler, sans démonstration, la liste des groupes de cohomologie à support compact $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$H_c^k(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour $n \geq 2$

$$H_c^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 1 \text{ et } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit M une variété différentiable connexe orientée de dimension n. Pour tout ouvert connexe non-vide $U \subset M$, montrer que l'application naturelle $H_c^n(U) \mapsto H_c^n(M)$ est un isomorphisme.

Conséquence immédiate de la dualité de Poincaré. Note: Dans l'énoncé manquait l'hypothèse d'orientabilité, sans laquelle l'enoncé est faux. Par exemple $H_c^2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = H^2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$, alors que $H_c^2(U) = \mathbb{R}$ si $U \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ est un ouvert de carte.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $n \geq 3$.

3. Soit x un point de M. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact pour un recouvrement ouvert de M bien choisi, montrer que l'application naturelle

$$H_c^k(M \setminus \{x\}) \to H_c^k(M)$$

est un isomorphisme pour $2 \leq k \leq n$ et est surjective pour $k = 1$.

On applique la suite exacte de Mayer-Vietoris à un voisinage U de x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et à $V := M \setminus \{x\}$. Comme $U \cap V$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, en utilisant le premier point, les suites exactes

$$H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(U \cup V) \to H_c^{k+1}(U \cap V)$$

s'écrivent

$$0 \to H_c^k(M \setminus \{x\}) \to H_c^k(M) \to 0$$

pour $2 \leq k \leq n-2$,

$$\mathbb{R} \to H_c^1(M \setminus \{x\}) \to H_c^1(M) \to 0$$

pour $k = 1$ et

$$0 \to H_c^{n-1}(M \setminus \{x\}) \to H_c^{n-1}(M) \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus H_c^n(M \setminus \{x\}) \to H_c^n(M) \to 0$$

pour $k = n-1$. Cette dernière suite exacte implique l'égalité des dimensions de $H_c^{n-1}(M \setminus \{x\})$ et $H_c^{n-1}(M)$ grâce au point 2.

4. Donner un exemple de variété différentiable connexe M pour laquelle l'application naturelle $H_c^1(M \setminus \{x\}) \to H_c^1(M)$ n'est pas injective.

$M = \mathbb{R}^2$ par exemple.

5. Soit $j : M \setminus \{x\} \to M$ l'inclusion canonique. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que l'application

$$j^* : H^k(M) \to H^k(M \setminus \{x\})$$

est un isomorphisme pour $0 \leq k \leq n-2$ et est injective pour $k = n-1$.

Conséquence immédiate de la dualité de Poincaré (ou raisonnement analogue à celui du point 3).