# CHAPITRE IX

## Dualité de Poincaré

### I. Quelques résultats d'algèbre homologique

**Lemme 1.** (Lemme des 5) *Considérons un diagramme commutatif d'applications linéaires entre espaces vectoriels*

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\
\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_5} \\
F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5
\end{array}$$

*tel que :*

- *Les suites horizontales sont exactes.*
- *Les applications $h_1, h_2, h_4$ et $h_5$ sont des isomorphismes.*

*Alors $h_3$ est un isomorphisme.*

**Preuve.** Les hypothèses nous permettent d'écrire les implications suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
h_3(x) = 0 & \Longrightarrow & g_3(h_3(x)) = 0 \Longrightarrow h_4(f_3(x)) = 0 \Longrightarrow f_3(x) = 0 \\
& \Longrightarrow & \exists x',\ f_2(x') = x \Longrightarrow g_2(h_2(x')) = 0 \Longrightarrow \exists y',\ g_1(y') = h_2(x') \\
& \Longrightarrow & h_2(f_1(h_1^{-1}(y'))) = g_1(h_1(h_1^{-1}(y'))) = g_1(y') = h_2(x') \\
& \Longrightarrow & x' = f_1(h_1^{-1}(y')) \Longrightarrow x = f_2(f_1(h_1^{-1}(y'))) = 0,
\end{array}$$

ce qui prouve l'injectivité de $h_3$. Pour vérifier la surjectivité, soit $y \in F_3$. Il existe $x \in E_4$ tel que $h_4(x) = g_3(y)$. On a donc

$$h_5(f_4(x)) = g_4(h_4(x)) = g_4(g_3(y)) = 0,$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}
f_4(x) = 0 & \Longrightarrow & \exists x',\ f_3(x') = x \Longrightarrow g_3(h_3(x')) = h_4(f_3(x')) = h_4(x) = g_3(y) \\
& \Longrightarrow & g_3(y - h_3(x')) = 0 \Longrightarrow \exists y',\ y - h_3(x') = g_2(y') \\
& \Longrightarrow & y = h_3(x') + g_2(y') = h_3(x') + h_3(f_2(h_2^{-1}(y'))),
\end{array}$$

donc $h_3$ est surjective.

□

La preuve du résultat suivant est facile et laissée comme exercice au lecteur.

**Lemme 2.** *Soit $G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

*et*

$$F_1 \xrightarrow{g_1} F_2 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{n-1}} F_n$$

*des suites exactes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors les suites suivantes sont exactes :*

$$E_n^* \xrightarrow{f_{n-1}^*} E_{n-1}^* \xrightarrow{f_{n-2}^*} \dots \xrightarrow{f_1^*} E_1^*$$

$$E_1 \oplus F_1 \xrightarrow{f_1 \oplus g_1} E_2 \oplus F_2 \xrightarrow{f_2 \oplus g_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1} \oplus g_{n-1}} E_n \oplus F_n$$

$$E_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} E_2 \otimes G \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}} \dots \xrightarrow{f_{n-1} \otimes \mathrm{id}} E_n \otimes G$$

**Lemme 3.** *Si*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

*est une suite exacte de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et si $E$ et $G$ sont de dimension finie, alors $F$ est de dimension finie.*

**Preuve.** On a $\mathrm{im}(g) \simeq F/\ker(g) = F/\mathrm{im}(f)$ et d'autre part $\mathrm{im}(g) \subset G$, ainsi que $\mathrm{im}(f) \simeq E/\ker(f)$ sont de dimension finie.

$\square$

## II. Variétés de type fini

**Définition 4.** On dit qu'une variété différentiable $M$ de dimension $n$ est *de type fini* s'il existe un recouvrement (appelé admissible) de $M$ par un nombre fini d'ouverts $U_1, \dots, U_k$ avec la propriété que toutes les intersections non-vides de la forme $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_l}$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. Le cardinal minimal d'un recouvrement ouvert admissible s'appelle le *type minimal* de $M$.

**Exemples.** 1. La sphère $S^n$ est de type fini. On peut prendre le recouvrement ouvert défini par

$$U_i^{\pm} = \{x \in S^n \ , \ \pm x_i > 0\}, \qquad 1 \leq i \leq n+1$$

(vérifier que c'est un recouvrement admissible).

2. Plus généralement, toute variété compacte est de type fini. On construit un recouvrement admissible à l'aide d'une métrique riemannienne et de voisinages géodésiquement convexes.

3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ ne sont pas de type fini (voir la proposition 6 ci-dessous).

Le résultat qui suit, couplé avec la suite exacte de Mayer-Vietoris et le Lemme des 5, est la clé pour la plupart des théorèmes concernant la cohomologie des variétés de type fini :

**Lemme 5.** *Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$ de type fini. Si $M$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, il existe un recouvrement à deux ouverts $U$ et $V$ de $M$ tel que les trois ouverts $U$, $V$ et $U \cap V$ soient de type minimal strictement inférieur à celui de $M$.*

**Preuve.** Soit $k \geq 2$ le type minimal de $M$ et $U_1, \ldots, U_k$ un recouvrement ouvert admissible. On définit $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \ldots \cup U_k$. Il est clair que $U$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ (donc de type minimal égal à 1) et $V$ et $U \cap V$ ont des recouvrements admissibles de cardinal $k - 1$.

□

**Proposition 6.** *La cohomologie d'une variété de type fini est de dimension finie.*

**Preuve.** Par récurrence sur le type minimal de la variété. L'initialisation étant évidente, supposons que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $M$ une variété de type minimal $k$. On utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris au recouvrement ouvert donné par le lemme 5 :

$$H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V)$$

pour conclure que $H^p(M)$ est de dimension finie pour tout $p$, grâce au lemme 3.

□

## III. Dualité de Poincaré et Formule de Künneth

**Théorème 7.** (Dualité de Poincaré) *Soit $M$ une variété orientée de type fini de dimension $n$. L'application linéaire $\varphi : \Omega^p(M) \to (\Omega_c^{n-p}(M))^*$ définie par*

$$\varphi(\omega)(\tau) = \int_M \omega \wedge \tau, \qquad \forall \omega \in \Omega^p(M),\ \tau \in \Omega_c^{n-p}(M)$$

*induit un isomorphisme $\varphi : H^p(M) \to (H_c^{n-p}(M))^*$.*

**Preuve.** Il faut tout d'abord vérifier que l'application bilinéaire

$$([\omega], [\tau]_c) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau$$

ne dépend pas du choix de $\omega \in \mathcal{Z}^p(M),\ \tau \in \mathcal{Z}_c^{n-p}(M)$. (exercice)

Pour montrer que l'application induite $\varphi : H^p(M) \to (H_c^{n-p}(M))^*$ est un isomorphisme, on procède par récurrence sur le type minimal de $M$. L'initialisation revient au fait (bien connu maintenant) que

$$[\omega] \in H_c^n(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$$

est un isomorphisme. On suppose que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $M$ une variété de type minimal $k$. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant au recouvrement ouvert donné par le lemme 5 :

$$H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) \longrightarrow H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(M)$$

$$\longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V)$$

ainsi que une partie du dual de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact (lemme 2) correspondant au même recouvrement :

$$(H_c^{n-p+1}(U) \oplus H_c^{n-p+1}(V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p+1}(U \cap V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(M))^*$$

$$\longrightarrow (H_c^{n-p}(M))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(U \cap V))^* \ .$$

On peut mettre ces deux suites exactes dans un même diagramme (les applications $\varphi$ sont définies en prenant sur $U$, $V$ et $U \cap V$ l'orientation induite par celle de $M$)

$$\begin{array}{ccccc}
H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) & \longrightarrow & H^{p-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^p(M) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
(H_c^{n-p+1}(U) \oplus H_c^{n-p+1}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-p+1}(U \cap V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-p}(M))^*
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow H^p(M) & \longrightarrow & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\
\longrightarrow (H_c^{n-p}(M))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-p}(U \cap V))^*.
\end{array}$$

On vérifie que ce diagramme est commutatif au signe près (exercice) et on conclut par le Lemme des 5.

□

Par une méthode similaire on démontre :

**Théorème 8.** (Formule de Künneth) *Soient $M$ et $N$ des variétés différentiables, et supposons que $N$ est de type fini. On appelle $p_1$ et $p_2$ les projections canoniques de $M \times N$ sur $M$ et $N$ respectivement et on définit les applications linéaires*

$$H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^{k+l}(M \times N)$$

*par* $[\omega] \otimes [\tau] \mapsto [p_1^*(\omega) \wedge p_2^*(\tau)]$. *Alors l'application induite*

$$\bigoplus_{k+l=p} H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^p(M \times N)$$

*est un isomorphisme pour chaque* $p$.

**Preuve.** On procède par récurrence sur le type minimal de $N$. Si le type minimal de $N$ est 1, le résultat est équivalent au Lemme de Poincaré. Supposons qu'il soit vrai pour toutes les variétés $N$ de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $N$ une variété de type minimal $k$. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant à un recouvrement ouvert de $N$ donné par le lemme 5 :

$$H^{l-1}(U) \oplus H^{l-1}(V) \longrightarrow H^{l-1}(U \cap V) \longrightarrow H^l(N)$$

$$\longrightarrow H^l(N) \longrightarrow H^l(U) \oplus H^l(V) \longrightarrow H^l(U \cap V),$$

puis on tensorise cette suite exacte avec $H^k(M)$ et on prend la somme directe des suites obtenues pour $k+l=p$. Le résultat est une suite exacte (grâce au lemme 2). De plus, il existe des applications linéaires de chaque espace de cette suite exacte vers l'espace correspondant dans la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement ouvert $(M \times U) \cup (M \times V)$ de $M \times N$, et le diagramme ainsi obtenu est commutatif grâce aux propriétés des applications d'image réciproque. L'hypothèse de récurrence nous dit que les deux applications de gauche et les deux applications de droite sont des isomorphismes, donc le Lemme des 5 permet de conclure.

□

## IV. Applications

Si $M$ est une variété compacte orientée de dimension $4k$, la *forme d'intersection* de $M$ est la forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$ définie par

$$([\omega], [\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}.$$

D'après la dualité de Poincaré, cette forme est non-dégénérée, et sa signature en tant que forme bilinéaire symétrique (c'est à dire la différence entre la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie positive et la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie négative) s'appelle la *signature* de $M$. La signature est un invariant important de la classe de difféomorphisme des variétés compactes orientées.

Avant la signature, les invariants les plus simples de la classe de difféomorphisme des variétés différentiables sont les *nombres de Betti*, définis par

$$\mathrm{b}_i(M) := \dim(H^i(M)).$$

La dualité de Poincaré nous permet aussi d'obtenir des relations entre les nombres de Betti :

**Théorème 9.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte et orientée de dimension $n$.*

1. $\mathrm{b}_i(M) = \mathrm{b}_{n-i}(M)$ *quel que soit $i$.*
2. *Si $n = 4k+2$ alors $\mathrm{b}_{2k+1}$ est pair.*

**Preuve.** Le premier point est conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $H^i(M)$ et le dual de $H_c^{n-i}(M) = H^{n-i}(M)$.

2. D'après la dualité de Poincaré, l'application

$$([\omega], [\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}.$$

est forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur $H^{2k+1}(M)$. Une telle forme ne peut exister que sur un espace de dimension paire (exercice).

$\square$