CHAPITRE VIII

ORIENTATION - INTÉGRATION - FORMULE DE STOKES

I. ORIENTATION

Soit $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un autre. On appelle Jacobien de φ au point $u \in U$, qu'on note $J(\varphi)(u)$, le déterminant de l'application linéaire inversible $D\varphi(u)$.

I-1. **Proposition.** Soit V une variété différentiable de dimension n. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

i) V possède un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que toutes les applications de changement de cartes sont à Jacobien positif. On dira que l'atlas est orientable

ii) Il existe sur V une n-forme différentielle $\omega \in \Omega^n(V)$ nulle en aucun point.

Preuve : *ii)* $\Rightarrow$ *i)* Soit donc ω une n-forme différentielle sur V, jamais nulle et soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas quelconque (mais où les ouverts U_i sont supposés connexes) définissant V.

Considérons la forme $(\varphi_i^{-1})^*(\omega/U_i)$. C'est une n-forme différentielle sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, qui ne s'annule pas sur cet ouvert. Elle est donc multiple par une fonction jamais nulle (donc de signe constant) de la forme $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

$$(\varphi_i^{-1})^*(\omega/U_i) = f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Posons alors $\varphi'_i = \varphi_i$ si f_i est positive et $\varphi'_i = S \circ \varphi_i$ si f_i est négative où S est, par exemple, la symétrie $(x_1, x_2 \cdots x_n) \to (-x_1, x_2 \cdots x_n)$. Les $(U_i, \varphi'_i)_{i\in I}$ forment bien un atlas équivalent à l'atlas initial $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ (puisque S est un difféomorphisme) et qui satisfait i).

En effet $(\varphi'_i \circ \varphi_j'^{-1})^* dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_n$ est un multiple positif de $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots dx_n$ ce qui montre que le Jacobien $J(\varphi'_i \circ \varphi_j'^{-1})$ est bien positif en tout point.

$$i) \Rightarrow ii)$$

Soit f_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement U_i de la variété V et posons

$$\omega = \sum_{i \in I} f_i \times \varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n)$$

Soit $v \in V$. Pour chaque indice i tel que $v \in U_i$ les différentes n-formes alternées $\varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n)(v)$ de T_vV sont toutes multiples positives de l'une d'entre elles notée λ. $\varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_1 \ldots dx_n) = \rho_i \lambda > 0$.

Comme les $f_i(v)$ sont positifs ou nuls et que leur somme vaut 1, $\omega(v)$ est bien non nulle. □

I-2. **Définition.** Une variété V satisfaisant l'une ou l'autre des conditions de la Proposition I.1 est dite *orientable.*

I-3. **Remarque importante.** Il résulte de la démonstration de la proposition qu'une variété est orientable si et seulement si tout atlas est "redressable" - ce qui signifie qu'en remplaçant éventuellement certaines cartes φ_i par $S \circ \varphi_i$, le nouvel atlas est orientable.

I-4. **Applications. Exercice.** $\mathbb{R}P(2)$ n'est pas orientable.

I-5. **Définition.** Une variété différentiable *orientée* est une variété munie d'une classe d'équivalence d'atlas orienté, ou, ce qui revient au même, d'une n-forme différentielle jamais nulle définie à un facteur multiplicatif positif près, où $n = \dim V$.

II. Intégration

Soit V une variété différentiable orientée de dimension n que nous noterons $[V]$ pour indiquer que l'orientation a été choisie et soit $\omega \in \Omega_c^n(V)$ une n-forme différentielle à support compacte. Nous allons définir une forme linéaire $I : \Omega_c^n(V) \to \mathbb{R}$ appelée intégrale

$$\omega \mapsto \int_{[V]} \omega \ .$$

Premier cas : Supposons que le support de la forme ω est contenu dans un ouvert de carte U_{i_0} d'un atlas orienté $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de V la forme $(\varphi_{i_0}^{-1})^*\omega \in \Omega_c^n(\varphi_{i_0}(U_{i_0}))$ s'écrit $f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n$ où f est une fonction à support compact contenu dans l'ouvert $\varphi_{i_0}(U_{i_0})$ de $\mathbb{R}^n$.

On pose alors

$$\int_{[V]} \omega = \int_{[U_{i_0}]} \omega = \int_{\varphi_{i_0}(U_{i_0})} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Si le support de la forme ω est contenu dans un autre ouvert de carte (U_{i_1}, φ_{i_1}) on a bien

$$\int_{\varphi_{i_0}(U_{i_0})} (\varphi_{i_0}^{-1})^*\omega = \int_{\varphi_{i_1}(U_{i_1})} (\varphi_{i_1}^{-1})^*\omega$$

En effet l'atlas étant orienté le Jacobien $J(\varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_0})$ est toujours positif. L'égalité suit alors de la formule de changement de variables dans les intégrales multiples que nous rappellons ci-dessous.

Soit $h : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un autre et soit $f : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ une fonction à support compact.

On a

$$\int_{\mathcal{O}'} f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{O}} |J(h)|(f \circ h)dx_1 \cdots dx_n \square$$

Par ailleurs si $\omega \in \Omega_c^n(\mathcal{O}')$ est la forme $f dx_1 \wedge dx_1 \ldots \wedge dx_n$, la forme $h^*(\omega) \in \Omega_c^n(\mathcal{O})$ est la forme $J(h)f \circ h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. $\square$

Cas général : Soit donc $\omega \in \Omega_c^n(V)$. Soient (U_i, φ_i) un atlas *orienté* de V et α_i, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement V_i. On pose

$$\int_{[V]} \omega = \sum_i \int_{[V]} \alpha_i\omega \ .$$

Cette définition est bien indépendante et de l'atlas orienté choisi dans sa classe d'équivalence et de la partition de l'unité α_i. En effet soient $(U'_{j'}, \varphi'_{i'})$ un autre atlas équivalent et $\alpha'_{i'}$ une partition de l'unité subordonnée à ce nouveau recouvrement $U'_{i'}$.

On a

$$\sum_i \int_{[V]} \alpha_i\omega = \sum_i \int_{[U_i]} \alpha_i\omega = \sum_i \int_{[U_i]} (\sum_{i'} \alpha'_{i'})\alpha_i\omega$$

$$= \sum_{i,i'} \int_{U_i \cap U'_i} \alpha'_i\alpha_i\omega = \cdots = \sum_{i'} \int_{[V]} \alpha'_{i'}\omega\square$$

II-1. **Remarque.** La définition précédente de l'intégration (satisfaisante d'un point de vue théorique) a l'air en revanche extrêmement difficile à manier en pratique.

En fait on a très rarement besoin de "calculer" effectivement de telles intégrales. Par ailleurs, on sait bien qu'en intégrant, on peut négliger les ensembles de mesure nulle. Cette remarque facilite beaucoup les calculs car très fréquemment, une variété à laquelle on enlève certains fermés de mesure nulle possède alors un atlas très simple (Voir Exercices).

III. Formule de Stokes (version faible)

III-1. **Théorème.** Soit $[V]$ une variété *orientée* de dimension n et soit $\eta \in \Omega_c^{n-1}(V)$.

Alors $\int_{[V]} d\eta = 0$.

Démonstration : Soit α_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) d'un atlas orienté de $[V]$. On a $\eta = \sum_i \alpha_i \eta$ et donc $d\eta = \sum_i d(\alpha_i \eta)$.

Il suffit donc de montrer que $\int_{[V]} d(\alpha_i \eta) = 0$ pour tout i.

Cette nullité est une conséquence immédiate du lemme suivant :

III-2. **Lemme.** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathcal{O})$. Alors $\int_{[\mathcal{O}]} d\eta = 0$.

Preuve : η s'écrit

$$\eta(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où les fonctions f_i sont à support compact.

Par linéarité il suffit de montrer par exemple que

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

mais

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f_n(x_1, \cdots x_{n-1}, +\infty) - f_n(x_1, \cdots x_{n-1}, -\infty)] dx_1 \cdots dx_{n-1} = 0$$

(car f_n est a support compact). □

III-3. **Conséquence.** Le théorème précédent signifie exactement que la forme linéaire intégration $I : \Omega_c^n(V) \to \mathbb{R}$ est nulle sur le sous-espace $d(\Omega_c^{n-1}(V))$.

Cette forme linéaire "passe donc au quotient" et fournit une forme linéaire (encore notée I, et encore appelée intégration).

$$I : H_c^n(V) \to \mathbb{R}.$$

Nous verrons au prochain chapitre que cette forme linéaire est "presque toujours" un isomorphisme.