CHAPITRE VII

THÉORÈMES CLASSIQUES

I. Inexistence de champs de vecteurs jamais nul sur les sphères de dimension paire

I-1. **Lemme.** Soit S^n la sphère de dimension n $n \geq 1$ et soit $I : S^n \to S^n$ l'application antipodale définie par $I(M) = -M \in S^n$.

L'application induite $I^* : H^n(S^n) \to H^n(S^n)$ est la multiplication par $(-1)^{n+1}$.

I-2. **Sous-Lemme I-2.** Soit $J : S^n \to S^n$ la symétrie hyperplane définie par

$$J(x_1, \cdots x_{n+1}) = -x_1, \cdots x_n, x_{n+1}$$

L'application induite $J^* : H^n(S^n) \to H^n(S^n)$ est la multiplication par -1.

Preuve du sous-lemme :

Puisque le difféomorphisme J respecte le recouvrement de la sphère S^n par U^+ et U^- (voir chapitre VI).

On a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "(J/S^{n-1})^*"] & H^{n-1}(U^+ \cap U^-) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\partial", "\sim"'] \arrow[d, "J^*"] & H^n(S^n) \arrow[d, "J^*"] \\
H^{n-1}(S^{n-1}) & H^{n-1}(U^+ \cap U^-) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\partial", "\sim"'] & H^n(S^n)
\end{tikzcd}$$

où ∂ est un isomorphisme dès que $n \geq 2$. On obtient donc en itérant par rapport à n le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
H^1(S^1) \arrow[r, "\partial \circ \partial \cdots \partial", "\sim"'] \arrow[d, "(J/S^1)^*"] & H^n(S^n) \arrow[d, "J^*"] \\
H^1(S^1) \arrow[r, "\partial \circ \partial \cdots \partial", "\sim"'] & H^n(S^n)
\end{tikzcd}$$

où J/S^1 est l'application $(x_1, x_1) \to (-x_1, x_2)$.

On constate que

$$(J/S^1)^* \left(\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_1^2} \quad \square$$

Preuve du Lemme I.1

Notons $J_i : S^n \to S^n i \in \{1, 2, n+1\}$ la symétrie hyperplan définie par

$$J_i(x_1, \cdots x_i, \cdots x_{n+1}) = (x_1 \cdots, -x_i, \cdots x_{n+1})$$

Les $(n+1)$ symétries hyperplans J_i sont toutes homotopes entre elles (Pourquoi ?). On a donc d'une part $J_i^* = J_{i'}^* \forall i, i'$ et d'autre part $I = J_1 \circ J_2 \circ \cdots \circ J_{n+1}$. On a donc bien que $I^* = (J^*)^{n+1}$ est la multiplication par $(-1)^{n+1}$. $\square$

I-3. **Théorème.** Tout champ de vecteurs différentiable sur la sphère S^{2n} s'annule.

Preuve : Supposons le contraire. C'est à dire qu'il existe une application différentiable $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que le vecteur $f(M)$ soit non nul et orthogonal au vecteur $0\vec{M}$ pour tout M de S^n.

Notons $g : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application (différentiable) définie par $g(M) = \frac{f(M)}{||f(M)||}$ et considérons l'application F de $S^n \times \mathbb{R} \to S^n$ définie par

$$F(M, t) = \sin t g(M) + \cos t 0\vec{M}$$

C'est une homotopie entre

$$F(-, 0) = Id_{S^n} \text{et} F(-, 1) = J$$

On a donc $J^* = Id^*$. Mais $Id^* = Id$ et $J^* = (-1)^{n+1} Id$ de $H^n(S^n)$. D'où la contradiction. $\square$

Pour les deux théorèmes qui vont suivre, il convient d'étendre aux applications continues la définition de l'image réciproque d'une forme différentielle.

Soient V et W deux variétés différentiables.

Lemme : Soit $f : V \to W$ une application continue

1) il existe une application différentiable g continuement homotope à f.

2) Si g_1 et g_2 sont deux applications différentiables, continuement homotopes, elles le sont différentiablement.

Pour f continue de V dans W, le lemme précédent permet de définir l'homomorphisme $f^* : H^*(W) \to H^*(V)$ en posant (par définition)

$f^* = g^*$ où g est n'importe quelle application différentiable, continuement homotope à l'application f.

II. Théorème dit "d'invariance du domaine"

Nous avons vu au chapitre IV que si un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$ alors $n = p$. Qu'en est-il si on remplace difféomorphisme par homéomorphisqme ? Les variétés topologiques ont-elles une dimension ?

II-1. **Théorème.** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme. Alors $n = p$.

Avant de donner la preuve démontrons un cas particulier

II-2. **Lemme.** $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ ne sont pas homéomorphes pour $n \neq p$.

Preuve du lemme : Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme et $x \in \mathbb{R}^n$ un point de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'homéomorphisme

$$\bar{h} : \mathbb{R}^n - \{x\} \to \mathbb{R}^p - \{h(x)\} .$$

Cet homéomorphisme induit un isomorphisme linéaire $\bar{h}^*$ entre les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{R}^p - \{h(x)\})$ et $H^i(\mathbb{R}^n - \{x\})$ pour tout i. Mais $n-1 = \sup i$ tels que $H^i(\mathbb{R}^n - \{x\}) = H^i(S^{n-1})$ soit non nul et $p-1 = \sup i$ tels que $H^i(\mathbb{R}^p - \{h(x)\}) = H^i(S^{p-1})$ soit non nul. $\square$

Preuve du Théorème :

Soit donc $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme.

- Considérons une boule ouverte B centrée en x et contenue dans U

- Considérons une boule ouverte B' centrée en $h(x)$ et contenue dans $h(B)$.

- Considérons une boule ouverte C centrée en x et contenue dans $h^{-1}(B')$ d'où le diagramme d'espaces :

$$\begin{array}{ccc}
U - \{x\} & \xrightarrow{h_1} & V - \{h(x)\} \\
\cup & & \cup \\
B - \{x\} & \xrightarrow{h_2} & h(B) - \{h(x)\} \\
i \circlearrowleft & & \circlearrowleft j \\
C - \{x\} & \xrightarrow{h_3} & B' - \{h(x)\}
\end{array}$$

où h_1, h_2, h_3 désignent les restrictions de l'homéomorphisme h aux ouverts correspondants.

L'inclusion de $C-\{x\}$ dans $B-\{x\}$ est une équivalence d'homotopie, tandis que h_2 est un homéomorphisme. D'où en passant à la cohomologie, le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \simeq H^{n-1}(B-\{x\}) \arrow[d, "i^*"', "\wr"] & H^{n-1}(h(B)-\{h(x)\}) \arrow[l, "h_2^*"', "\sim"] \arrow[d, "j^*"] \\
H^{n-1}(C-\{x\}) & H^{n-1}(B'-\{h(x)\}) \simeq H^{n-1}(S^{p-1}) \arrow[l, "h_1^*"']
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme non nul $i^* \circ h_2^*$ qui est égal à $h_1^* \circ j^*$ interdit la nullité du groupe $H^{n-1}(B'-\{h(x)\})$. On a donc $n-1=p-1$ $\square$

III. Théorème du point fixe de Brouwer

III-1. **Théorème.** Notons $\mathbb{D}^{n+1}$ le disque fermé $\mathbb{D}^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \|x\| \leq 1\}$. Toute application continue $f:\mathbb{D}^{n+1}\to\mathbb{D}^{n+1}$ possède un point fixe.

Preuve : par l'absurde

Soit donc $f:\mathbb{D}^{n+1}\to\mathbb{D}^{n+1}$ sans point fixe.

On note $r:\mathbb{D}^{n+1}\to S^n$ l'application qui à tout point x de $\mathbb{D}^{n+1}$ associe l'intersection de la demie-droite $f(x)x$ avec S^n. C'est une application continue (Pourquoi ?) qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{D}^{n+1} \arrow[dr, "r"] & \\
S^n \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "Id"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion de la sphère S^n dans le disque $\mathbb{D}^{n+1}$.

Prolongeons $r:\mathbb{D}^{n+1}\to S^n$ en $R:\mathbb{R}^{n+1}\to S^n$ en posant :

$$\begin{aligned}
R(X) &= \frac{X}{\|X\|} \text{ si } \|X\|\geq 1\\
R(X) &= r(X) \text{ si } \|X\|\leq 1
\end{aligned}$$

On obtient le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^{n+1} \arrow[dr, "R"] & \\
S^n \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "Id"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

où cette fois i est l'inclusion de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$

On passe à la cohomologie

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[dl, "i^*"'] & \\
H^n(S^n) & & H^n(S^n) \arrow[ll, "Id", "\sim"'] \arrow[ul, "\mathbb{R}^*"']
\end{tikzcd}$$

Le groupe $H^n(\mathbb{R}^{n+1})$ est nul et $H^n(S^n)$ ne l'est pas pour $n > 0$. Contradiction. $\square$