CHAPITRE V

Formes différentielles sur les variétés

I. Espace tangent

Soit M une variété différentiable de dimension n et $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M. On note par $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ le difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ et $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in M$ un point de M et I_x l'ensemble (non-vide) des indices i tels que $x \in U_i$. On définit la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble $I_x \times \mathbb{R}^n$:

$$(i, v) \sim (j, w) \qquad \Longleftrightarrow \; v = d\varphi_{ij_{\varphi_j(x)}}(w).$$

Exercice: vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Définition 1. L'espace quotient

$$I_x \times \mathbb{R}^n / \sim$$

s'appelle *l'espace tangent à M en x*. Il est noté $T_x M$.

Pour tout indice $i \in I_x$ on peut définir une bijection $\psi_i : \mathbb{R}^n \to T_x M$ par

$$v \mapsto \psi_i(v) := \overline{(i, v)}.$$

Du fait que (exercice)

$$\psi_i^{-1} \circ \psi_j = d\varphi_{ij_{\varphi_j(x)}} \tag{1}$$

est une application linéaire quels que soient $i, j \in I_x$, l'espace $T_x M$ a une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension n.

Remarque 2. L'espace tangent dépend (en apparence) du choix de l'atlas qui définit la structure différentiable de M. Il est néanmoins facile à vérifier que si $\mathcal{U}' = (U'_j, \varphi'_j)_{j \in J}$ est un atlas équivalent à $\mathcal{U}$, alors les espaces tangents construits à l'aide de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont canoniquement isomorphes en tant qu'espaces vectoriels.

L'union (disjointe)

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

de tous les espaces tangents s'appelle le *fibré tangent*.

Exemple: Si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent à M en chaque point x s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'atlas à un seul élément donné par l'inclusion de M dans $\mathbb{R}^n$. Le fibré tangent de U s'identifie alors à $U \times \mathbb{R}^n$.

II. Différentielle d'une fonction

Rappel: Si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des fonctions C^∞ entre des ouverts de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \qquad \forall i \in \overline{1,p},\ j \in \overline{1,m},\ x \in U$$

s'écrit de manière condensée

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x, \qquad \forall\ x \in U. \tag{2}$$

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n avec des atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{U}' = (U'_j, \varphi'_j)_{j\in J}$ et soit $f : M \to N$ une fonction C^∞. On rappelle que cela signifie que pour tous $x \in M$, U_i contenant x et U'_j contenant $f(x)$, la fonction $\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est une fonction C^∞ entre des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.

Proposition-Définition. La différentielle de f est l'application $df : TM \to TN$ définie par

$$df(X) = \psi'_j \circ d(\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} \circ \psi_i^{-1}(X) \tag{3}$$

pour tous $x \in M$, $X \in T_xM$, U_i contenant x et U'_j contenant $f(x)$. En particulier, si f est une fonction à valeurs réelles, on a

$$df(X) = d(f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} \circ \psi_i^{-1}(X). \tag{4}$$

Preuve. Les relations (1) et (2) montrent que la définition de $df(X)$ ne dépend pas des choix de U_i et U'_j.

On remarque que df est une application linéaire entre T_xM et $T_{f(x)}N$ quel que soit $x \in M$. Un calcul simple montre que la relation (2) continue à être vérifiée: si M, N, P sont des variétés différentiables et $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont des fonctions différentiables, alors

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x, \qquad \forall\ x \in M. \tag{5}$$

III. Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction C^∞, notée X, définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'image d'un point $x \in U$ par X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vu comme élément de l'espace tangent T_xU. Cette notion se généralise aisément aux variétés:

Définition 3. Un *champ de vecteurs* sur une variété différentiable M est une application $X : M \to TM$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $X(x) \in T_xM$ quel que soit $x \in M$.

(ii) X est différentiable, dans le sens suivant: pour chaque carte (U_i, φ_i), l'application de $\varphi_i(U_i)$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x \mapsto \psi_i^{-1} \circ X \circ \varphi_i^{-1}(x)$$

est C^∞. Autrement dit, l'expression de X dans chaque carte doit être C^∞.

Remarque. Sur l'intersection de deux cartes, $U_i \cap U_j$, on a d'après ce qui précède

$$\psi_j^{-1} \circ X \circ \varphi_j^{-1}(y) = d(\varphi_{ji})_y \circ \psi_i^{-1} \circ X \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_{ij}(y), \qquad \forall y \in \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

donc la définition de la différentiabilité des champs de vecteurs ne dépend pas du choix de la carte.

IV. Formes différentielles

Soit M une variété différentiable de dimension n. Pour chaque $x \in M$ on définit $\Lambda_x^k(M) := \Lambda^k(T_xM^*)$. Un élément de $\Lambda_x^k(M)$ est donc une application k-linéaire alternée sur T_xM à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'union disjointe

$$\Lambda^k(M) := \bigsqcup_{x \in M} \Lambda_x^k(M)$$

s'appelle le fibré extérieur de degré k.

Définition 4. Une *k-forme différentielle* sur une variété différentiable M est une application $\omega : M \to \Lambda^k(M)$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $\omega(x) \in \Lambda_x^k(M)$ quel que soit $x \in M$.

(ii) X est différentiable, dans le sens suivant: la fonction $x \mapsto \omega(x)(X_1(x), \dots, X_k(x))$ est C^∞ quels que soient les champs de vecteurs (C^∞) $X_1, \dots, X_k$ sur M.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes différentielles est noté par $\Omega^k(M)$.

Si U est un ouvert de M, la restriction à U définit une application linéaire $\Omega^k(M) \to \Omega^k(U)$.

Exemple fondamental. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, sa différentielle $df : TM \to T\mathbb{R}$ définit une 1-forme différentielle. En effet, d'après (4), si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, la fonction $x \mapsto df_x(X(x))$ s'écrit dans une carte (U, φ)

$$df_x(X(x)) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \psi^{-1}(X(x)) = F(\varphi(x)) \tag{6}$$

où on a noté par F la fonction sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$

$$F(y) = d(f \circ \varphi^{-1})_y \circ \psi^{-1}(X(\varphi^{-1}(y)))$$

qui est C^∞ d'après la définition 3.

En particulier, si on note par $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ les composantes de la carte φ, on obtient des 1-formes $dx_i \in \Omega^1(U)$.

Proposition 5. *Les* 1*-formes* dx_i*,* $i = \overline{1, n}$ *forment une base de* $\Lambda^1(U)$ *en chaque point.*

Preuve. Soit $x \in U$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to T_xM$ l'isomorphisme définit par la carte φ. Comme $x_i \circ \varphi^{-1}$ est la i-ème coordonnée sur $\mathbb{R}^n$, la relation (4) montre que $dx_i(x)(\psi(e_j)) = \delta_{ij}$, où $\{e_j\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

D'après le Corollaire II-4 du premier chapitre, les k-formes

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

forment un base de $\Lambda^k(U)$ en chaque point. On constate qu'on peut travailler (localement) avec les formes différentielles sur les variétés comme sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 6. Soient M et N deux variétés différentiables et soit $f : M \to N$ une fonction C^∞. Si $\omega \in \Omega^k(N)$ est une k-forme différentielle sur N, on définit son *image réciproque* $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ par

$$(f^*\omega)_x(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{f(x)}(df_x(X_1), \ldots, df_x(X_k)),$$

quel que soit $x \in M$ et les vecteurs tangents $X_i \in T_xM$.

La vérification du fait que $f^*\omega$ est C^∞ est facile et laissée au lecteur. Comme pour le cas des formes sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, il est clair que $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et satisfait $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ quelles que soient $\alpha, \beta \in \Omega^*(N)$. De plus, l'image réciproque satisfait

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \tag{7}$$

grâce à la relation (5).

V. Différentielle extérieure

Théorème 7. *Soit M une variété différentiable. Il existe une unique application $\mathbb{R}$-linéaire $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ satisfaisant les conditions suivantes:*

(i) $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M) \quad \forall p \geq 0.$

(ii) $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ *est la différentielle des fonctions qui a été définie dans* (4).

(iii) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta), \qquad \forall \alpha \in \Omega^p(M),\ \beta \in \Omega^*(M).$

(iv) $d \circ d = 0.$

(v) Si $f : M \to N$ *est une application différentiable, alors* $d \circ f^* = f^* \circ d$.

Preuve. L'unicité résulte immédiatement de la condition (v). En effet, en considérant les inclusions des cartes $U_i \to M$, on voit que d sur M est déterminé par d sur les U_i, qui à son tour est déterminé par d sur les ouverts $\varphi_i(U_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour montrer l'existence, on remarque que la donnée d'une forme différentielle sur M est équivalente à la donnée de formes différentielles ω_i sur les cartes U_i qui coincident sur les intersections: $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$. Soit alors $\omega \in \Omega^p(M)$. On définit la $(p+1)$-forme σ_i sur U_i par

$$\sigma_i := \varphi_i^*(d((\varphi_i^{-1})^*\omega)),$$

où l'opérateur d dans le membre droit est la différentielle extérieure habituelle sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est le difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ et $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$ défini au début de ce chapitre, la relation de fonctorialité (7) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sigma_i|_{U_i \cap U_j} &= \varphi_i^*(d((\varphi_i^{-1})^*\omega)) = \varphi_j^*(\varphi_{ij}^* d((\varphi_i^{-1})^*\omega)) \\
&= \varphi_j^*(d(\varphi_{ij}^*(\varphi_i^{-1})^*\omega)) = \varphi_j^*(d((\varphi_j^{-1})^*\omega)) \\
&= \sigma_j|_{U_i \cap U_j},
\end{aligned}$$

donc la collection (σ_i) définit bien une $p+1$-forme sur M, qu'on appelle $d\omega$. La vérification des propriétés (i)–(v) résulte directement des propriétés analogues de d sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE VI

Cohomologie de De Rham sur les variétés

La théorie de la cohomologie de De Rham sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ se transpose sans difficulté sur les variétés. Plus précisément, les définitions et résultats du chapitre III restent vrais en remplaçant les ouverts de $\mathbb{R}^n$ dans chaque enoncé par des variétés de dimension n, sauf pour les suites exactes de Mayer-Vietoris en cohomologie simple et à support compact (Proposition II-3 et son corollaire, Théorème III-2 et Corollaire III-2), ou au lieu de "U et V ouverts de $\mathbb{R}^n$ il faut lire "U et V ouverts d'une variété de dimension n".