CHAPITRE IV

Variétés différentiables

I. Définitions

I-1. On appelle *variété topologique* tout espace topologique X satisfaisant les conditions suivantes :

i) tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour un certain n.
ii) l'espace X est séparé.
iii) l'espace X est union dénombrable de compacts.

I-2. **Remarques.** – La condition ii) ne résulte pas de i). (Donner un exemple).

– On peut remplacer i) par i)' : Tout point de X possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. (Pourquoi ?).

– Les conditions techniques ii) et iii) sont là pour assurer l'existence de partitions de l'unité (cf. Prop. V-2).

I-3. On appelle *atlas différentiable* sur la variété topologique X la donnée :

i) d'un recouvrement ouvert de $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.
ii) pour chaque U_i d'un homéomorphisme :
$\varphi_i : U_i \to \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout couple d'indice $i, j \in I$ la composition

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soit différentiable.

Le couple (U_i, φ_i) s'appelle une carte et les applications $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ s'appellent les applications de changement de cartes.

I-4. Deux atlas différentiables sur la même variété topologique X, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si "leur réunion" est encore un atlas différentiable, autrement dit si les applications

$$\varphi_i(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap V_j \xrightarrow{\psi_j} \psi_j(U_i \cap V_j)$$

sont elles aussi différentiables pour tout $i \in I$ et $j \in J$.

I-5. On appelle *variété différentiable* une variété topologique munie d'une classe d'équivalence d'atlas différentiable.

I-6. **Remarque.** La donnée d'un atlas différentiable sur une variété topologique en fait une variété différentiable. (Celle munie de la classe d'équivalence de l'atlas en question).

I-7. **Applications différentiable. Difféomorphisme.** Soient V, V' deux variétés différentiables et $f : V \to V'$ une application continue.

Soient $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(U'_{i'}, \varphi_{i'})_{i'\in I'}$ deux atlas différentiables définissant respectivement les variétés différentiables V et V'.

On dit que f est *différentiable* si les composées

$$\varphi_i(f^{-1}(U'_i) \cap U_i) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} f^{-1}(U'_i) \cap U_i \xrightarrow{f} U'_{i'} \xrightarrow{\varphi'_{i'}} \mathcal{O}'_{i'}$$

sont différentiables pour tout $i \in I$, $i' \in I'$. Cette définition ne dépend pas des atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(U'_i, \varphi'_{i'})_{i'\in I'}$ mais seulement de leurs classes d'équivalences respectives. (Le vérifier).

On dit que $f : V \to V'$ est un difféomorphisme si

i) f est bijective,

ii) f est f^{-1} sont différentiables.

Exercice. Soient $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ trois variétés différentiables et f, g deux applications différentiables. Le composé $g \circ f$ est différentiable.

En particulier l'ensemble des difféomorphismes d'une variété V sur elle-même forment un groupe (pour la composition) noté $Diff(V)$.

II. Exemples évidents de variétés

1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On en fait une variété différentiable en le munissant de la classe d'équivalence de l'atlas à *une* carte (donc il n'y a rien à vérifier)

$$U \xrightarrow{Id} \mathcal{O} = U \subset \mathbb{R}^n$$

2) Soit $U \subset V$ un ouvert d'une variété différentiable et soit $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant V.

L'atlas $(V_i \cap U\ ,\ \varphi_i/V_i \cap U)_{i\in I}$ fait de U une variété différentiable.

3) Si V et V' sont deux variétés différentiables. On note $V \times V'$ et on l'appelle la variété produit, la variété différentiable dont l'espace topologique sous-jacent est le produit $V \times V'$ muni de la topologie produit et si $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, respectivement $(U'_{i'}, \varphi'_{i'})_{i'\in I'}$ définissent V, resp. V', on considère l'atlas différentiable $(U_i \times U'_{i'}\ ,\ \varphi_i \times \varphi'_{i'})_{i,i'\in I\times I'}$ pour définir $V \times V'$ dont la classe d'équivalence ne dépend que de celle des atlas (U_i, φ_i) et (U'_i, φ'_i).

III. Rang - Dimension - Sous-variétés :

III-1. **Lemme.** Soit $h : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^p$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Alors $n = p$

Preuve : Soit $o \in \mathcal{O}$ un point de l'ouvert $\mathcal{O}$. La différentielle de h au point o, $Dh(o)$, est une application linéaire inversible (d'inverse $Dh^{-1}_{(h(\mathcal{O}))}$) de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ $\square$

III-2. Soient V, V' deux variétés différentiables, $v \in V$ un point de V et $f : V \to V'$ une application différentiable.

On considère l'application différentiable $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ et sa différentielle au point $\varphi(v)$. On constate que le rang de cette application linéaire ne dépend que de f (cf. Lemme III.1)) et on l'appelle le *rang de l'application* f au point v.

III-3. **Proposition définition.** Soit V une variété différentiable et *connexe*, et (V_i, φ_i) un atlas différentiable de V.

Appelons n_i (cf. Lemme) la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{n_i}$ qui contient l'ouvert $\varphi_i(V_i)$. Ce nombre ne dépend pas de i, et ne change pas si l'on remplace l'atlas de V par un atlas équivalent. On l'appelle donc n et c'est la *dimension* de la variété différentiable V.

Preuve : L'ensemble des points de V qui possèdent une carte (U, φ) tels que $\dim \varphi(U) = n$ est ouvert et fermé dans V. $\square$

Exemples, Exercices :

a) il y a une seule variété connexe de dimension 0 à savoir 1pt.

b) les variétés de dimension 1 s'appellent des courbes. Toute courbe connexe et compacte est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

c) les variétés de dimension 2 s'appellent des surfaces. Par exemple la sphère S^2, le tore $S^1 \times S^1$ etc.

III-4. Soit W une variété différentiable et $A \subset W$ une partie de W. On dit que A est une sous-variété de W si tout point de a de A est contenu dans une carte (U_i, φ_i) d'un atlas définissant W tel que

$$\varphi_i(U_i \cap A) = \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

pour un certain p.

III-5. Toute sous-variété d'une variété différentiable est en fait une variété.

Preuve :

1) tout point $a \in A$ possède un voisinage dans A (à savoir $U_i \cap A$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (à savoir $\varphi(U_i) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$). A est donc une variété topologique.

2) La famille $(U_i \cap A\ ,\ \varphi_i / U_i \cap A)$ est évidemment un atlas différentiable sur A. □

Voici maintenant un critère qui permet de reconnaître facilement une sous-variété.

III-6. **Théorème.** Soit $A \subset W$ une partie de la variété différentiable W. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est une sous-variété de W.

ii) tout point $a \in A$ possède un voisinage U dans W et une fonction différentiable $F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, de rang $n-p$ en tout point de U telle que : $A \cap U = F^{-1}(0)$ (autrement dit, la partie A est localement définissable par $n-p$ équations indépendantes).

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii)

On choisit $U = U_i$ et $F : U_i \to \mathbb{R}^{n-p}$ $\quad F = p \circ \varphi_i$ où p est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$. On constate que F est bien différentiable, de rang $n-p$, et que :

$$F^{-1}(0) = \rho_i^{-1}(p^{-1}(0)) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap A$$

ii) $\Rightarrow$ $i)$

Quitte à restreindre U on peut supposer que c'est un domaine de carte de W. Et on considère l'application C^∞ : $G = F.\varphi_i^{-1} : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}^{n-p}$. C'est une application C^∞, de rang $n-p$. Supposons, pour simplifier, que ce soit le mineur $(\frac{\partial G_j}{\partial x_i}) i, j \in (p+1, p+2, \ldots, n)$ qui soit inversible.

Soit alors $H : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}^n$ défini par

$$H(x_1, -x_n) = (x_1, \cdots x_p, G(x_1, -x_n))$$

C'est une application C^∞ de rang maximum. C'est donc un difféomorphisme local disons de $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'' \subset \mathbb{R}^n$.

On pose $F' = H \circ \varphi_i \quad F' : \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}') \to \mathcal{O}''$

$(\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}'), F')$ est une carte de W et $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}') \cap A$ est bien égal à $F'^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ $\square$

Remarques importantes :

1) Puisque la condition "être de rang maximum" est une condition ouverte, on peut remplacer la condition ii) du Théorème III.5 par la condition ii') F est de rang $n-p$ au point a.

2) Le théorème III.5 est une grande source d'exemples de variétés (puisque les sous-variétés sont des variétés).

En fait on peut montrer que la toute variété est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand. Ce sont donc tous les exemples. Pourquoi alors parler de variétés ?

IV. Les variétés quotients :

IV-1. **Vocabulaire des actions de groupe.** a) Soit G un groupe (discret) et X un ensemble. Se donner une action de G dans X, c'est se donner un homomorphisme de groupes $\rho : G \to Bij(X)$ où $Bij(X)$ est le groupe des bijections de l'ensemble X.

Si ρ est claire dans le contexte on note simplement $g.x$ le point $\rho(g).x$.

On a alors

$$g_1.(g_2x) = (g_1g_2).x \quad \forall g_1, g_2, x$$

$$1.x = x \quad \forall x$$

On note $\mathcal{O}(x)$ qu'on appelle l'orbite de x sous G. $\mathcal{O}(x) = \{g.x \quad g \in G\}$. La relation "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence.

On note X/G, qu'on appelle le quotient de X par G, l'ensemble des classes d'équivalences.

On dit que l'action est *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite.

- Soit x un point de X. On appelle isotropie de x le sous-groupe $I(x)$ de G constitué des $g \in G$ tels que $g.x = x$

- Si $I(x)$ est réduit à l'élément neutre pour tout $x \in X$. On dit que l'action est *libre.*

- Libre et transitif s'appelle *simplement transitif.*

Noter que dans ce cas le choix d'un point $x \in X$ établit une bijection de G sur X définie par $g \mapsto g.x$. Cette bijection dépend bien sûr du choix de x. Elle n'est pas canonique.

b) Supposons maintenant que X soit un espace topologique.

Une action *continue* de G dans X est la donnée d'un homorphisme de groupe $\rho : G \to \text{Homeo}(X)$ où Homéo(X) est le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique X.

L'espace topologique quotient X/G est l'ensemble X/G muni de la "topologie quotient", c'est à dire de la topologie la plus fine qui rende la projection $p : X \to X/G$ continue.

On dit que l'action continue de G dans X est *propre* si pour tout compact K de X l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.K \cap K \neq \emptyset$ est fini.

Proposition : Soit X un espace topologique séparé et localement compacte. Soit G un groupe agissant librement et proprement dans X. Alors l'espace topologique quotient est séparée.

Preuve (Exercice) :

c) Soit maintenant V une variété différentiable. Une action différentiable de G dans V est la donnée d'un homomorphisme de groupe $\rho : G \to \text{Diff}(V)$ où Diff$V$ est le groupe des difféomorphismes de la variété V.

Proposition : Supposons que l'action différentiable soit libre et propre. Il existe sur l'espace quotient V/G une unique structure de variété différentiable qui fasse de la proposition $p : V \to V/G$ un difféomorphisme local.

- On l'appelle la variété quotient et on la note V/G.

Preuve : On sait déjà que V/G est séparée, évidemment union dénombrable de compacts (comme V).

Tout point de V possède un voisinage U tels que $gU \cap U = \emptyset$ pour $g \neq 1$. Il en résulte que la projection $p : U \to p(U)$ est un homéomorphisme. Donc d'une part V/G est une variété topologique et la famille $(p(U), \varphi o p^{-1})$ où φ est une carte de V contenant U, un atlas différentiable de V/G. □

V. Anneau des fonctions différentiables

Soit V une variété différentiable. On note $\mathcal{C}^\infty(V;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables de V dans $\mathbb{R}$. L'addition et la multiplication point par point en font un anneau commutatif unitaire.

V-1. **Proposition.** Il existe des fonctions différentiables non constantes.

Preuve : Soit $v \in V$ un point de V et (U, φ) une carte de V contenant v.

Il existe (fonction bosse) une fonction différentiable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont le support est contenu dans l'ouvert $\varphi(U) = \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ et telle que

$h(\varphi(v)) = 1$. On considère alors la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) & = h \circ \varphi(x) \qquad x \in U \\ f(x) & = 0 \quad x \notin U \end{cases}$$

C'est bien une fonction non constante de V dans $\mathbb{R}$. $\square$

En fait on a beaucoup plus.

V-2. **Théorème.** Existence de partitions de l'unité.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentiable V. Pour chaque indice $i \in I$ il existe une fonction différentiable $f_i \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ satisfaisant les conditions suivantes.

1) $f_i \geq 0$ et support $f_i \subset U_i$

2) La famille $(\mathrm{Supp} f_i)_{i \in I}$ est localement finie ce qui signifie que tout point de V possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de tels supports

3) $\sum_{i \in I} f_i = 1$

Preuve : (Voir par exemple le cours de Laudenbach).