CHAPITRE III

Cohomologie de De Rham

I - Complexe de De Rham

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les résultats du chapitre précédent se résument de la façon suivante. On considère la suite d'applications ci-dessous qu'on appelle le complexe de De Rham de l'ouvert U

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^2(U) \cdots \xrightarrow{\ d\ } \Omega^n(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{n+1}(U) = 0$$

I-1 Définition

On note $Z^p(U)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ constitué des p-formes différentielles ω telles que $d\omega = 0$. Une telle forme est dite *fermée*.

Par exemple $Z^n(U) = \Omega^n(U)$ (puisque $\Omega^{n+1}(U) = 0$).

On note $B^p(U)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ constitué des p-formes différentielles de la forme $d\alpha$ où $\alpha \in \Omega^{p-1}(U)$. Une telle forme est dite *exacte*. (Par convention $B^0(U) = 0$).

Autrement dit

$$\begin{aligned} Z^p(U) &= \text{Ker } d \qquad d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^p(U) &= \text{Im } d \qquad d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U) \end{aligned}$$

Puisque $d \circ d = 0$ on voit que toute forme exacte est fermée : Ker $d \supset$ Im d. $B^p(U) \subset Z^p(U)$ et on peut donc considérer l'espace vectoriel quotient $Z^p(U)/B^p(U)$. On le note $H^p(U)$ et il s'appelle *le p-ième groupe de cohomologie* de l'ouvert U.

Exemple I-2

Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ avec les coordonnées x et y et soit $\alpha \in \Omega^1(U)$ la 1-forme différentielle $\alpha(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

On a

$$d\alpha(x,y) = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx$$

$$d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx$$

et donc

$$d\alpha(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx = 0 \ .$$

On voit donc que la forme $\alpha \in Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. Elle est donc fermée et nous verrons très bientôt qu'elle n'est pas exacte. Ce qui montrera que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \neq 0$.

Exemple I-3

Calcul de $H^0(U)$.

$Z^0(U) \subset \Omega^0(U)$ est l'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ telles que $df = 0$. Un tel f est donc constant sur chaque composante connexe de U. Tandis que $B^0(U)$ est par définition nul.

On voit donc que $H^0(U) = Z^0(U) = \mathbb{R}^C$ où C désigne l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert U.

I-4 Fonctorialité de la cohomologie.

Soit $f : U \to V$ une application C^∞ de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $V \subset \mathbb{R}^m$.

Puisque $d \circ f^* = f^* \circ d$ on voit que

$$f^*(Z^p(V)) \subset Z^p(U)$$

et

$$f^*(B^p(V)) \subset B^p(U) \ .$$

L'application f^* induit donc par passage au quotient une application $\mathbb{R}$-linéaire notée encore $f^* : H^p(V) \to H^p(U)$.

Soient maintenant 3 ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^\ell$ et $f : U \to V$, $g : V \to W$ deux applications de classe C^∞. On vérifie immédiatement que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. et que $\mathrm{Id}_U^* = \mathrm{Id}$.

Ces propriétés se résument en disant que "le p-ième groupe de cohomologie" est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts d'espaces numériques et des applications C^∞ dans la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et des applications $\mathbb{R}$-linéaires.

En particulier si deux ouverts U et V sont difféomorphes, les groupes de cohomologie $H^p(V)$ et $H^p(U)$ sont isomorphes pour tout p. Nous allons voir qu'en fait il suffit de beaucoup moins qu'un difféomorphisme entre U et V pour assurer l'isomorphisme de $H^*(V)$ et $H^*(U)$.

I-5 Homotopie.

C'est une notion tout à fait fondamentale.

I-1 Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et f_0, f_1 deux applications C^∞ de U dans V. On dit que f_0 et f_1 sont (différentiablement) homotopes, s'il existe une application C^∞ $F : U \times \mathbb{R} \to V$ telles que $F/U \times \{0\} = f_0$ et $F/U \times \{1\} = f_1$.

Théorème fondamental I-5.

Soient f_0 et $f_1 : U \to V$ deux applications homotopes, alors f_0^* et f_1^* : $H^p(V) \to H^p(U)$ sont *égales* pour tout $p \geq 0$.

Démonstration

1) première réduction : l'hypothèse signifie que dans le diagramme ci-dessous les deux triangles sont commutatfis : $f_0 = F \circ i_0$ et $f_1 = F \circ i_1$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, "f_0"] & & \\
& U \times \mathbb{R} \arrow[r, "F"] & V \\
U \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $i_0 : U \to U \times \mathbb{R}$ est définie par $i_0(u) = (u, 0)$ et $i_1 : U \to U \times \mathbb{R}$ par $i_1(u) = (u, 1)$.

Il est donc suffisant (par fonctorialité) de démontrer le cas particulier du théorème I-5 i_0^* et i_1^* : $H^p(U \times \mathbb{R}) \to H^p(U)$ sont égales pour tout $p \geq 0$.

2) **Lemme** : les deux applications i_0^* et i_1^* : $H^p(U \times \mathbb{R}) \to H^p(U)$ sont égales.

La méthode est très générale.

Nous allons construire pour tout $p \geq 1$ une application linéaire $K_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ telle que $i_0^* - i_1^* = K_{p+1} \circ d + d \circ K_p$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \arrow[dl, "K_p"'] \arrow[d, "i_0^* - i_1^*"] \arrow[r, "d"] & \Omega^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \arrow[dl, "K_{p+1}"'] \arrow[r] & {} \\
\Omega^{p-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^p(U) \arrow[r] & {} &
\end{tikzcd}$$

Une fois cela fait on constate alors que si ω est une p-forme fermée ($d\omega = 0$) les formes (fermées) $i_1^*(\omega)$ et $i_0^*(\omega)$ différent de la forme exacte $d(K_p(\omega))$. Elles ont donc même classe dans le groupe de cohomologie $H^p(U)$ ce qui montre bien que les application *en cohomologie* i_0^* et i_1^* sont égales.

■

3) Construction des applications $K_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$.

Cette construction s'appelle le **Lemme de Poincaré.**

On note t la variable dans $\mathbb{R}$. Toute p-forme différentielle sur $U \times \mathbb{R}$ s'écrit alors de façon unique $\omega = \alpha(t) + \beta(t) \wedge dt$ où $\alpha(t)$ est une p-forme différentielle sur U dépendant du paramètre t, et $\beta(t)$ une $(p-1)$-forme différentielle sur U dépendant du paramètre t.

Si $\gamma(t)$ est une k-forme sur U dépendant du paramètre t, on peut, pour chaque t (fixé), considérer sa différentielle que nous notons $d\gamma(t)$ et qui est une $k+1$-forme sur U dépendant du paramètre t.

On peut aussi dériver par rapport à t pour obtenir de nouveau une k-forme différentielle sur U dépendant du paramètre t, que nous noterons $\dot{\gamma}(t)$.

Posons $K_p(\omega) = (-1)^p \int_0^1 \beta(t)dt$.

On a $d\omega = d\alpha(t) + (-1)^p \dot{\alpha}(t) \wedge dt + d\beta(t) \wedge dt$ et

$$K_{p+1}(d\omega) = (-1)^{p+1} \int_0^1 d\beta(t)dt - \int_0^1 \dot{\alpha}(t)dt$$

$$d(K_p\omega) = (-1)^p \int_0^1 d\beta(t)dt \ .$$

Donc

$$d(K_p(\omega)) + K_{p+1}(d\omega) = -\int_0^1 \dot{\alpha}(t)dt = \alpha(0) - \alpha(1) = i_0^*(\omega) - i_1^*(\omega) \ .$$

■

I-6 Conséquences.

Invariance de la cohomologie par type d'homotopie.

Définition

On dit que deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications C^∞ : $f : U \to V$ et $g : V \to U$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l'identité de U, et $f \circ g$ soit homotope à l'identité de V.

Théorème I-6

Si U et V ont le même type d'homotopie, les groupes de cohomologie $H^p(U)$ et $H^p(V)$ sont isomorphes pour tout $p \geq 0$.

Démonstration

Considérons la composition

$$H^p(V) \xrightarrow{g^*} H^p(V) \xrightarrow{f^*} H^p(U) \ .$$

On a $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* \overset{\mathrm{ThI-5}}{=} (\mathrm{Id}_U)^* = \mathrm{Id}_{H^p(U)}$ et de même $g^* \circ f^* = \mathrm{Id}_{H^p(V)}$.

Il en résulte que f^* est un isomorphisme (d'inverse g^*).

■

I-6.1 Corollaire

Soit $n \geq 0$. On a $H^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \forall p > 0 \\ \mathbb{R} & p = 0 \end{cases}$.

Démonstration

Soit $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(0) = 0$ et $g : \mathbb{R}^n \to \{0\}$.

On a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\{0\}}$ et $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identiquement nulle.

Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application bilinéaire (donc C^∞) définie par $F(V, t) = tV$ $t \in \mathbb{R}$ $V \in \mathbb{R}^n$.

C'est une homotopie entre $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $f \circ g$.

Les deux espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ ont même type d'homotopie, donc même cohomologie.

■

II - Suite exacte de Mayer-Victoris.

Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce paragraphe est de déterminer la cohomologie de l'union $U_1 \cup U_2$ en fonction de la cohomologie de U_1, de U_2 et de $U_1 \cap U_2$.

II-1 Un lemme d'algèbre.

Etant donné une suite d'espaces vectoriels E_i $i \in \mathbb{Z}$ et une suite d'applications linéaires $f_i : E_i \to E_{i+1}$, nous dirons que la suite

$$E_{i-1} \overset{f_{i-1}}{\rightarrow} E_i \overset{f_i}{\rightarrow} E_{i+1} \overset{f_{i+1}}{\rightarrow} \cdots$$

est

1) exacte en i si $\mathrm{Ker}\ f_i = \mathrm{Im}\ f_{i-1}$
2) exacte, si elle est exacte en i pour tout i.

On appelle complexe différentiel, une famille C^i, $i \in \mathbb{Z}$ d'espaces vectoriels, munie d'une famille d'applications $d_i : C^i \to C^{i+1}$ telle que les composées $d_{i+1} \circ d_i$ soient nulles pour tout $i \in \mathbb{Z}$. (Par exemple le complexe de De Rham d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, complété par un infinité de 0 à droite et à gauche).

On note (C^*, d) un tel complexe, $Z^i(C^*) = \mathrm{Ker}\ d_i$, $B^i(C^*) = \mathrm{Im}\ d_{i-1}$ et le quotient $Z^i(C^*)/B^i(C^*) = H^i(C^*)$ s'appelle le i-groupe de cohomologie du complexe C^*.

Si (C^*, d) et (C'^*, d') sont deux complexes différentiels, un morphisme $F : C^* \to C'^*$ est la donnée pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ d'une application linéaire $f^i : C^i \to C'^i$ telles que l'on ait $f^{i+1} \circ d_i = d'_i \circ f^i$ pour tout i.

Un tel morphisme induit pour chaque i une application linéaire $H^i(C^*) \overset{f^*}{\rightarrow} H^i(C'^*)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition.

II-2 Proposition

Soient C^*, C'^*, C''^*, trois complexes différentiels et soient $I : C^* \to C'^*$ et $S : C'^* \to C''^*$ deux morphismes de complexes telles que les suites

$$0 \to C^j \overset{i^*}{\rightarrow} C'^j \overset{s^*}{\rightarrow} C''^j \to 0$$

soient exactes pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

(Ce qui signifie : i^* injective, s^* surjective, et $\mathrm{Ker}\ s^* = \mathrm{Im}\ i^*$).

On a alors une longue suite exacte infinie

$$\overset{\partial}{\rightarrow} H^k(C^*) \overset{i^*}{\rightarrow} H^k(C'^*) \overset{s^*}{\rightarrow} H^k(C''^*) \overset{\partial}{\rightarrow} H^{k+1}(C^*) \overset{i^*}{\rightarrow}$$

où ∂ est l'application linéaire définie ci-dessous :

Définition de l'application ∂ appelée "Le connectant" :

Soit $\alpha'' \in H^k(C''^*)$ et choisissons $x'' \in Z^k(C''^*)$ telle que $[x''] = \alpha'' \in H^k(C''^*)$.

Puisque $s^* : C'^k \to C''^k$ est surjective, choisissons $x' \in C'^k$ telle que $s^*(x') = x''$ et considérons $dx' \in B'^{k+1}(C'^*)$.

On a $s^*(dx') = d(s^*x') = dx'' = 0$ car $x'' \in Z^k(C''^*)$.

Puisque la suite $0 \to C^{k+1} \xrightarrow{i^*} C'^{k+1} \xrightarrow{s^*} C''^{k+1} \to 0$ est exacte, dx' s'écrit de manière unique $i^*(x)$ où $x \in C^{k+1}$.

En fait $i^*(dx) = d(i^*x) = d(dx') = 0$, ce qui montre que x appartient à $Z^{k+1}(C^*)$. On pose alors $\partial(\alpha'') = \beta \in H^{k+1}(C^*)$ où β est la classe de $x \in Z^{k+1}(C^*)$ dans $H^{k+1}(C^*)$.

On doit vérifier que β est bien indépendant des choix faits pour le définir.

i) **Indépendance du choix de** $x'' \in Z^k(C''^*)$ **tel que** $[x''] = \alpha$.

Soit y'' un autre élément de $Z^k(C''^*)$ tel que $[y''] = [x''] = \alpha$. On a $y'' = x'' + dz''$ où $z'' \in C''^{k-1}$. Puisque $s^* : C'^{k-1} \to C''^{k-1}$ est surjective, soit $u' \in C'^{k-1}$ telle que $s^*(u') = z''$. L'élément $y' = x' + du' \in C'^k$ vérifie bien $s^*(y') = y''$. On s'aperçoit que $dy' = dx'$.

■

ii) **Indépendance du choix de** $x' \in (C'^k)$ **tel que** $s^*(x') = x''$.

Si y' est un autre choix, la suite

$$0 \to C^k \xrightarrow{i^*} C'^k \xrightarrow{s^*} C''^k \to 0$$

étant exacte, on voit que y' s'écrit

$$y' = x' + i^*(z) \qquad z \in C^k$$

et donc $dy' = dx' + i^*(dz)$ et donc avec les notations évidentes, $y = x + dz \in Z^{k+1}(C^*)$. Ce qui montre bien que $[y] = [x] \in H^{k+1}(C^*)$.

iii) **Linéarité de** ∂ :

Les vérifications i) et ii) étant faites, la linéarité est évidente. (Pourquoi ?)

La vérification de l'exactitude de la longue suite de cohomologie est sans difficulté. Nous traitons par exemple l'exactitude en $H^k(C''^*)$ et nous conseillons vivement au lecteur d'effectuer les deux autres vérifications : exactitude en $H^k(C^*)$ et en $H^k(C'^*)$.

Exactitude en $H^k(C''^*)$.

Nous reprenons les notations de la définition de ∂

i) $\partial \circ s^* = 0$.

En effet si $\alpha'' \in H^k(C''^*)$ s'écrit $s^*(\alpha')$, $\alpha' \in H^k(C'^*)$. On a $x'' = s^*(x')$ où $[x'] = \alpha'$ et $[x''] = \alpha''$.

En particulier $dx' = 0$ et $\partial(\alpha'') = 0$.

ii) **Réciproquement** $\partial(\alpha) = 0$ signifie que $x \in Z^{k+1}(C^*)$ est de la forme du $u \in C^k$.

On a alors $0 = i^*(x - du) = d(x' - i^*(u))$ où $\underline{x' - i^*(u)} \in Z^k(C'^*)$ et on a bien $\underline{s^*(x' - i^*(u))} = s^*(x') = x''$ ce qui montre que $s^*(\overline{x' - i^*(u)}) = \alpha \in H^k(C''^*)$ où $\underline{x' - i^*(u)}$ est la classe dans $H^k(C'^*)$ de l'élément $x' - i^*(u) \in Z^k(C'^*)$.

■

II-3 Suite exacte de Mayer-Vietoris.

II-3 Proposition

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Considérons le diagramme commutatif d'inclusions

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "j_V"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i_V"'] & & U \cup V \\
 & V \arrow[ur, "j_V"'] &
\end{tikzcd}$$

La suite ci-dessous est une suite exacte de complexes différentiels :

$$0 \to \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{j_V^* \oplus j_U^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

Démonstration.

L'injectivité de $j_V^* \oplus j_U^*$, ainsi que l'exactitude au centre résulte immédiatement de la remarque (évidente mais fondamentale) que la donnée d'une forme différentielle sur $U \cup V$, n'est rien d'autre que la donnée d'une forme différentielle sur U, et d'une forme différentielle sur V, qui coïncident sur l'intersection $U \cap V$.

Pour la surjectivité de $i_U^* - i_V^*$ nous utilisons la proposition suivante qui sera démontrée plus loin dans le cours.

Proposition

Il existe deux fonctions C^∞ α et β de $U \cup V \to \mathbb{R}$ telles que

- $\alpha + \beta = 1$
- Supp $\alpha \subset U$
- Supp $\beta \subset V$

Preuve de la surjectivité de $i_U^* - i_V^*$:

Soit $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$.

On note $\alpha\omega \in \Omega^p(V)$ la forme définie par la formule

$$\alpha\omega(v) = \begin{cases} \alpha(v) \times \omega(v) & v \in U \cap V \\ 0 & v \notin U \cap V \end{cases}$$

et de façon analogue la forme de $\Omega^p(U)$, $\beta\omega$. On a bien

$$i_U^*(\beta\omega) = \beta\omega \text{ et } i_V^*(\alpha\omega) = \alpha\omega \ .$$

donc

$$i_U^* - i_V^*(\beta\omega, -\alpha\omega) = (\beta + \alpha)\omega = \omega \ .$$

■

Remarque : Noter l'interversion ($\alpha\omega$ est une forme sur V, et $\beta\omega$ sur U).

Corollaire : Suite exacte de Mayer-Vietoris.

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On a une longue suite exacte de cohomologie de De Rham

$$\xrightarrow{\partial} H^p(U \cup V) \xrightarrow{j_V^* \oplus j_U^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(U \cup V) \rightarrow$$

Preuve : cela résulte immédiatement de la proposition II-1 et de la remarque

$$H^p(\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)) = H^p(\Omega^*(U)) \oplus H^p(\Omega^*(V)) \ .$$

■

II-4 Cohomologie de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

II-4 Théorème

Pour tout $n \geq 2$. On a $H^0(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$ et $H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0$ pour $p \neq 0$ et $p \neq n-1$.

Preuve : on introduit les ouverts U = complémentaire du fermé $\{(x_1, \cdots, x_n)/x_2 = x_3 \cdots = x_n = 0$ et $x_1 \geqslant 0\}$ et V complémentaire du fermé $\{(x_1 \cdots x_n)|x_2 = \cdots = x_n = 0$ et $x_1 \leqslant 0\}$.

On constate que

i) $\mathbb{R}^n - \{0\} = U \cup V$.

ii) Les ouverts U et V sont étoilés donc ont le type d'homotopie du point. En particulier $H^p(U) = H^p(V) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$.

iii) $U \cap V = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1} - \{0\})$ et a donc le type d'homotopie et donc la même cohomologie que $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris commence comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & H^0(U \cup V) & \to & H^0(U) \oplus H^0(V) & \to & H^0(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^1(U \cup V) & \to & H^1(U) \oplus H^1(V) \\
& \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
0 \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \to & \left\{\begin{matrix} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & n = 2 \\ \mathbb{R} & n > 2 \end{matrix}\right\} & \to & H^1(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

puisque U, V et $U \cup V$ sont connexes tandis que $U \cap V$ est connexe pour $n > 2$ et a deux composantes connexes pour $n = 2$.

Il en résulte que $H^1(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq 0$ pour $n > 2$ et que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$.

Par ailleurs on a la suite exacte pour $p > 1$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) & \to & H^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^p(U \cup V) & \to & H^p(U) \oplus H^p(V) \\
\|(ii) & & \downarrow \wr (iii) & & \| & & \|(ii) \\
0 & \to & H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}) & \xrightarrow{\partial} & H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

qui montre que le connectant ∂ est un isomorphisme. On a donc par récurrence l'égalité pour $p \leq n - 1$

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^1(\mathbb{R}^{n-p+1} - \{0\}) .$$

Ce qui montre que pour $1 \leq p < n - 1$

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0 \text{ et } H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{R} .$$

Puisque, comme toujours, $H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0$ pour $p > n$ il reste à montrer que $H^n(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est nul.

Considérons donc $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ et ses deux ouverts U et V. L'intersection $U \cap V$ a deux composantes connexes, chacune ayant le type d'homotopie du point il en résulte que $H^1(U \cap V)$ ainsi que $H^2(U)$ et $H^2(V)$ sont nuls.

La suite exacte

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^2(U \cap V) & \to & H^2(U) \oplus H^2(V) \\
\| & & \| & & \| \\
0 & \to & H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

montre que $H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est bien nul.

■

III - Cohomologie à support compact.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega^p(U)$ une p-forme différentielle sur U. On appelle support de ω, que l'on note Supp ω, l'adhérence de l'ensemble des points de U où ω est non nulle. C'est aussi le complémentaire de l'ensemble des points de U qui possèdent un voisinage où ω est identiquement nulle. On a donc $\mathrm{Supp}\, d\omega \subset \mathrm{Supp}\, \omega$.

En particulier si le support de ω est compact, celui de $d\omega$ l'est aussi. On note $\Omega^p_c(U)$ le sous-ensemble de $\Omega^p(U)$ constitué des p-formes différentielles sur U dont le support est compact. C'est un sous-espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ et en fait $(\Omega^*_c(U), d)$ est un sous-complexe différentiel de $(\Omega^*(U), d)$.

On note $H^p_c(U)$, qu'on appelle p-ième groupe de cohomologie à support compact, le p-ième groupe de cohomologie du complexe des formes différentielles à support compact.

III-1 Attention

Si $f : U \to V$ est une application C^∞, l'application $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ n'envoie pas en général $\Omega^*_c(V)$ dans $\Omega^*_c(U)$ puisque l'image réciproque d'une forme à support compact n'est pas en général à support compact.

III-1 Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$, et $f : U \to V$ une application C^∞. On dit que f est *propre* si l'image réciproque par f de tout compact de V est un compact de U.

III-1 Proposition

✓ Soient $f^* : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ une application C^∞ *propre*. L'application linéaire $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ induit une application notée encore $f^* : \Omega^*_c(V) \to \Omega^*_c(U)$.

Preuve : évidente

Pour résumer la cohomologie à supports compacts est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts d'espaces euclidiens et des applications *propres* dans la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires.

III-1 Corollaire

Si U et V sont deux ouverts difféomorphes, leurs cohomologies à support compact sont isomorphes.

III-2 Suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact.

Soient $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Toute forme différentielle à support compact contenu dans U est aussi une forme différentielle à support compact contenu dans V. Ceci montre que l'inclusion $i : U \hookrightarrow V$ induit une application (évidemment linéaire) notée $i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(V)$ qui commutte évidemment à l'opératuer d.

III-2 Théorème

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Le diagramme (habituel) d'inclusions :

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i_V"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "j_V"'] & \end{tikzcd}$$

induit la suite exacte de complexes ci-dessous

$$0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{i_{U_*} \oplus i_{V_*}} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{U_*} - j_{V_*}} \Omega_c^*(U \cup V) \to 0$$

Preuve :

- Chacune des applications i_{U_*} et i_{V_*} est injective et donc a fortiori l'application $i_{U_*} \oplus i_{V_*}$.

- Soient $\omega_1 \in \Omega_c^*(U)$ et $\omega_2 \in \Omega_c^*(V)$ telles que $j_{U_*}(\omega_1) = j_{V_*}(\omega_2)$. Ceci montre que ω_1 et ω_2 ont en fait leur support dans $U \cap V$ et qu'elles coïncident en tant que forme à support compact de $U \cap V$.

- La surjectivité de l'application $j_{U_*} - j_{V_*}$ résulte là encore de la proposition de la page 21.

Si ω est une forme à support compact dans $U \cup V$. La forme $\alpha\omega$ est une forme à support compact dans U, et $\beta\omega$ est une forme à support compact dans V.

On a bien $\omega = (j_{U_*} - j_{V_*})(\alpha\omega, -\beta\omega)$

■

III-2 Corollaire

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On a la suite exacte infinie ci-dessous

$$\xrightarrow{\partial} H_c^p(U \cap V) \xrightarrow{i_{U_*} \oplus i_{V_*}} H_c^p(U) \oplus H_c^*(V) \xrightarrow{j_{U_*} - j_{V_*}} H_c^*(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_c^{p+1}(U \cap V) \to$$

Preuve : c'est une conséquence immédiate du théorème III-2 et de la proposition II-2.

III-3 Cohomologie à support compact de $\mathbb{R}^n$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce paragraphe est de comparer les groupes de cohomologie à support compact de $U \times \mathbb{R}$ à ceux de U.

Toute p-forme différentielle ω à support compact de $U \times \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $\omega = \alpha(t) + \beta(t) \wedge dt$ où $\alpha(t)$ est une p-forme différentielle de U dépendant du paramètre t, à support compact dans U pour chaque t et nulle pour t suffisamment grand et $\beta(t)$ une $(p-1)$-forme différentielle de U dépendant du paramètre t, à support compact dans U pour chaque t et nulle pour t suffisamment grand.

On définit alors l'application

$$\Pi_* \ : \ \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U)$$

par la formule $\Pi_*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t)dt$.

III-3 Théorème

i) L'application $\Pi_* \ : \ \Omega_c^{p+1}(U\times\mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U)$ commutte aux opérateurs différentiels.

ii) Elle induit donc une application notée encore

$$\Pi_* \ : \ H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H_c^p(U) \ .$$

Cette application est un isomorphisme.

Preuve :

i) On a (avec les notations déjà rencontrées p. 16)

$$d\omega = d\alpha(t) + ((-1)^{p+1}\dot{\alpha}(t) + d\beta(t)) \wedge dt$$

et

$$\Pi_*(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ((-1)^{p+1}\dot{\alpha}(t) + d\beta(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta(t)dt = d(\Pi_*(\omega)) \ .$$

■

ii) Soit $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)dt = 1$.

Considérons l'application

$$e_* \ : \ \Omega_c^p(U) \to \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$$

définie par la formule $e_*(\omega) = e(t)\omega \wedge dt$.

Cette application e_* commutte aux différentielles. En effet

$$e_*(d\omega) = e(t)d\omega \wedge dt = d(e(t)\omega \wedge dt) = d(e_*(d\omega)) \ .$$

Elle induit donc une application encore notée $e_* : H_c^p(U) \to H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$ dont nous allons voir qu'elle est l'inverse de l'application Π_*.

D'abord la composition

$$\Omega_c^p(U) \xrightarrow{e_*} \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi_*} \Omega_c^p(U)$$

est bien l'identité de $\Omega_c^p(U)$.

En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\omega dt = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)dt = \omega$.

Par contre la composition

$$\Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi_*} \Omega_c^p(U) \xrightarrow{e_*} \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$$

n'est pas l'identité.

On a cependant le

III-3 Lemme

Soit $K : \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U \times \mathbb{R})$ définie par

$$K(\alpha(t) + \beta(t) \wedge dt) = \int_{-\infty}^{t} \beta(u)du - \left(\int_{-\infty}^{t} e(u)du\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(u)du \ .$$

On vérifie que $\mathrm{Id}_{\Omega_c^{p+1}(U\times\mathbb{R})} - e_* \circ \Pi_* = (-1)^p(Kd - dK)$.

■

Ce qui montre (Lemme p. 15) qu'en cohomologie, l'application $e_* \circ \Pi_*$ est bien l'identité de $H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$.

■

III-3 Corollaire

Soit $n \geq 0$,

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ \mathbb{R} \text{ pour} & p = n \end{cases}$$

Remarque :

- En fait on connait un générateur de $H_c^p(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit d'itérer n-fois l'application e_* à un générateur de $H_c^0(pt)$ à savoir la fonction constante égale à 1.

On trouve la n-forme différentielle à support compact de $\mathbb{R}^n$

$$e(t_1) \times e(t_2) \times e(t_n)dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

dont le support peut être choisi arbitrairement petit.