CHAPITRE II

FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR LES OUVERTS DE $\mathbb{R}^n$

I-1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle p-forme différentielle sur U (ou forme différentielle de degré p) une application de classe C^∞, w de U dans $\Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*) = (\Lambda^p(\mathbb{R}^n))^*$.

Une p-forme différentielle sur U associe donc à chaque point de U, une forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.

- Par exemple si $p > n$, les p-formes différentielles sont identiquement nulles.

- Une 0-forme différentielle est juste une fonction C^∞ définie sur U.

On note $\Omega^p(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des p-formes différentielles sur U.

Le produit extérieur du chapitre précédent fournit un produit (point par point) noté encore

$$\Lambda \ : \ \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U)$$

I-2 Notations

Soit $e_1, e_2, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il est traditionnel de noter $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la ième projection : $x_i = e_i^*$. C'est une application linéaire. Elle est donc différentiable et sa différentielle $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ est l'application constante $dx_i(M) = x_i = e_i^*$.

dx_i est donc aussi la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ qui associe a tout point M de $\mathbb{R}^n$, la 1-forme alternée e_i^*.

Puisque $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \cdots \wedge e_{i_p}^*$ $0 < i_1 < i_2 < \cdots i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*)$ on voit que toute p-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, s'écrit de façon unique

$$w = \sum_{I \subset J} \underset{I}{f} \ dx_I$$

où J est l'ensemble des multi-indices $\in \{1, 2, \cdots, n\}$ strictement croissants de longueur p, et si $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ avec $0 < i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq n$, dx_I est la p-forme différentielle $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$ et f_I une application C^∞ de U dans $\mathbb{R}$.

Une p-forme différentielle sur U, n'est donc rien d'autre que la donnée de la collection des C_n^p fonctions C^∞, $f_I, I \in J$.

II - Différentielle extérieure.

Si f est une fonction C^∞ sur U, sa différentielle

$$df \ : \ U \to (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$$

apparaît donc comme une 1-forme différentielle sur U.

Exercice

Montrer que

$$df(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \ .$$

La correspondance $f \mapsto df$ est donc une application R-linéaire, $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$. Le théorème ci-dessous définit un prolongement canonique de d à $\Omega^*(U)$ tout entier.

Théorème II-1.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique application, $\mathbb{R}$-linéaire, appelée différentielle extérieure, notée encore $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ satsifaisant les conditions suivantes.

1) $$d(\Omega^p(U)) \subset \Omega^{p+1}(U) \quad \forall p \geq 0$$

2) $$d \ : \ \Omega^0(U) \to \Omega^1(U) \text{ est la différentielle des fonctions}$$

3) $$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad \forall \alpha \in \Omega^p(U), \ \beta \in \Omega^*(U)$$

4) $$d \circ d \ : \ \Omega^p(U)) \to \Omega^{p+2}(U) \text{ est nulle} \quad \forall p \geq 0 \ .$$

Preuve :

1/ Unicité.

Soit $w = \sum_{I\subset J} f_I dx_I$ une p-forme différentielle. D'après 3) (noter l'abus de notations $f_I dx_I = f_I \wedge dx_I$) on a

$$dw = \sum_{I\subset J} d\underset{I}{f} \wedge dx_I + \sum_{I\subset J} \underset{I}{f} \wedge d(dx_I) \ .$$

Le deuxième terme de cette somme est nulle.

En effet $d(x_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \overset{(3)}{=} \sum\limits_{i=1}^{p} (-1)^i dx_1 \wedge dx_1 \cdots \wedge d(dx_i) \wedge \cdots \wedge dx_p = 0$ d'après (4).

Donc si d existe on a nécessairement $dw = \sum\limits_{I\subset J} d\underset{I}{f} \wedge dx_I$ qui est parfaitement déterminée d'après (2).

■

2/ Existence.

Posons donc pour $w = \sum\limits_{I\subset J} \underset{I}{f}\, dx_I$, $dw = \sum\limits_{I\subset J} d\underset{I}{f} \wedge dx_I$ et montrons que cette définition satisfait la $\mathbb{R}$-linéarité et 1), 2), 3), 4).

- La $\mathbb{R}$-linéarité, 1) et 2) sont clairs.

- Montrons 3). A cause de la linéarité, il suffit de vérifier pour $\alpha = f dx_I$ et $\beta = g dx_K$ où longueur de $I = p$ et longueur de K quelconque. On a :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg\ dx_I \wedge dx_K) = f dg \wedge dx_I \wedge dx_K + g\ df \wedge dx_I \wedge dx_K \ .$$

en fait $g\ df \wedge dx_I \wedge dx_K = df \wedge dx_I \wedge g\ dx_K = d\alpha \wedge \beta$ tandis que

$$f dg \wedge dx_I \wedge dx_K = (-1)^p f dx_I \wedge dg \wedge dx_K = (-1)^p \alpha \wedge d\beta \ .$$

■

- Montrons 4). Là encore on peut supposer $w = f dx_I$

$$dw = df \wedge dx_I \text{ et } d(dw) \overset{3)}{=} d(df) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I)$$

$$d(df) = d(\sum_I^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0 \ .$$

Le cas particulier où $f = x_i$ montre grâce à 3) que $d(dx_I) = 0$.

■

III - Image réciproque d'une forme différentielle.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \to V$ une application C^∞.

Dans ces conditions nous allons définir une application linéaire

$$f^* \; : \; \Omega^p(V) \to \Omega^p(U) \qquad \forall p \geq 0 \; .$$

(Attention au changement de sens. On le signale en mettant l'étoile en haut dans la notation f^*.)

Soit $\omega \in \Omega^p(V)$. On pose

$$f^*(\omega)_{(u)}(X_1, \cdots, X_p) = \omega_{f(u)}(df_{(u)}(X_1), \cdots, df_{(u)}(X_p))$$

où $u \in U$ et $X_1, \cdots, X_p \in \mathbb{R}^n$.

Autrement dit la forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$, $f^*(\omega)_{(u)}$ est l'image réciproque (II-8.1) de la forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^m$ $\omega_{(f(u))}$ par l'application linéaire $df_{(u)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Théorème III-1.

L'application $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $$f^* \text{ est } \mathbb{R} - \text{linéaire}$$

2) $$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

3) $$f^* \circ d = d \circ f^* \; .$$

Démonstration

1) est évident sur la définition.

2) Comme remarqué précedemment on a

$$f^*(\omega)_u = (df_{(u)})^*(\omega_{f(u)}) \; .$$

La propriété 2) est donc une reformulation de II-8.1 (exercice).

3) Commençons par le cas particulier où $\omega = \varphi \in \Omega^0(V)$.

Lemme III-2.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(V) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1(V) \\ \Big\downarrow f^* & & \Big\downarrow f^* \\ \Omega^0(U) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1(U) \end{array}$$

est commutatif

Preuve : Soit $\varphi \in \Omega^0(V)$. Par définition de f^* on a $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ et $d(f^*(\varphi)) = d(\varphi \circ f)$.

Par définition $(f^*(d\varphi))_u(X) = d\varphi_{f(u)}(df_{(u)}(X))$ ce qui signifie que $f^*d\varphi = d(\varphi \circ f) = d(f^*(\varphi))$.

■

Cas général

Posons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ et soit $\omega \in \Omega^p(V)$. A cause de 1) on peut supposer que $\omega = \varphi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p$. On a alors grâce à 2)

$$f^*(\omega) = \varphi \circ f \; f^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_p) \; .$$

Le lemme III-2 montre que $f^*(dy_i) = d(f^*(y_i)) = d(y_i \circ f) = df_i$.

On a donc

$$f^*(\omega) = \varphi \circ f \; df_1 \wedge df_2 \cdots \wedge df_p$$

et

$$d(f^*(\omega)) = d(\varphi \circ f) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p \; .$$

Par ailleurs $d\omega = d\varphi \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p$ et $f^*(d\omega) = f^*d\varphi \wedge f^*dy_1 \wedge \cdots \wedge f^*dy_p$ et donc (Lemme III-2)

$$f^*(d\omega) = d(\varphi \circ f) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p = d(f^*(\omega)) \; .$$

■