CHAPITRE I

# Algèbre tensorielle et algèbre extérieure

### Notations

Soit $k$ un corps commutatif et soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels sur $k$. On note $\mathcal{L}(E\ ;\ F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$.

Si $F = k$, on note $E^* = \mathcal{L}(E\ ;\ k)$ le dual de $E$.

### Exercice

Montrer que l'application de bidualité $E \to E^{**}$ est un isomorphisme, si et seulement si la dimension de $E$ est finie.

Si $E$, $F$, $G$, sont trois espaces vectoriels sur $k$, on note $\beta(E, F\ ;\ G)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$.

## I - Produit tensoriel

**I-1** Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels sur $k$.

### Théorème I-1

i) il existe un espace vectoriel sur $k$, noté $E \otimes F$ qui se lit $E$ tenseur $F$, et une application bilinéaire $j \in \beta(E, F\ ;\ E \otimes F)$ tels que, pour tout espace vectoriel $G$ et toute application bilinéaire $b \in \beta(E, F\ ;\ G)$ il existe une *unique* application *linéaire* $c : E \otimes F \to G$ telle que $b = c \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "b"] & \\ E \otimes F \arrow[r, "c"'] & G \end{tikzcd}$$

ii) Le couple $(E \otimes F,\ j)$ est unique à unique isomorphisme près. Ce qui signifie que si $(E \otimes F,\ j)$ et $((E \otimes F)',\ j')$ sont deux solutions de i), il existe un unique isomorphisme $I : E \otimes F \to (E \otimes F)'$ tel que $j' = I \circ j$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, remarquons qu'il est peut-être illégitime de donner un nom $(E \otimes F)$ à un objet qui n'est défini qu'à isomorphisme près. C'est pourtant ce que l'on fera.

**Preuve** : on commence par l'unicité ii), qui est un phénomène très général.

Puisque $(E \otimes F,\ j)$ est solution de i), il existe un unique $\alpha : E \otimes F \to (E \otimes F)'$ linéaire, telle que $j' = \alpha \circ j$ et de même, en échangeant les rôles de $E \otimes F$ et $(E \otimes F)'$, un unique $\beta : (E \otimes F') \to E \otimes F$ telle que $j = \beta \circ j'$.

On a donc $j = \beta \circ j' = \beta \circ (\alpha \circ j) = (\beta \circ \alpha) \circ j$.

Par ailleurs $j = \mathrm{Id}_{E \otimes F} \circ j$.

L'unicité de l'application linéaire $c$, requise en i) montre donc que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{E \otimes F}$ et de façon analogue que $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{(E \otimes F)'}$

■

i) **Existence** : construction d'une solution.

Notons $k^{(E \times F)}$ l'espace vectoriel (énorme !) de base l'ensemble $E \times F$. C'est l'espace vectoriel constitué des applications de $E \times F \to K$ nulles sauf sur un ensemble fini.

Soit $\sigma : E \times F \hookrightarrow K^{(E \times F)}$ l'injection qui associe à $(e, f)$ le $(e, f)$-ième vecteur de base ou, si l'on veut, l'application de $E \times F \to K$ qui vaut 1 sur $(e, f)$ et 0 ailleurs.

Cette injection $\sigma : E \times F \to K^{(E \times F)}$ n'a pour l'instant aucune propriété algébrique. Elle n'est ni linéaire, ni bilinéaire.

On va maintenant faire un quotient minimum de $K^{(E \times F)}$ pour rendre $\sigma$ bilinéaire.

Considérons donc $R(E, F)$ le sous-espace vectoriel de $K^{(E \times F)}$ engendré par les éléments

$$\sigma(ae + be', cf + df') - ac\,\sigma(e, f) - ad\,\sigma(e, f') - bc\,\sigma(e', f) - bd\,\sigma(e', f')$$

et notons

$$E \otimes F = K^{(E \times F)}/R(E, F) \text{ et } j\ :\ E \times F \to E \otimes F$$

la composée $E \times F \xrightarrow{\sigma} K^{(E \times F)} \xrightarrow{R} K^{(E \times F)}/R(E, F)$ où $R$ est la surjection canonique.

L'application $j$ est bien devenu tautologiquement bilinéaire.

Si $b : E \times F \to G$ est n'importe quelle application bilinéaire, on définit $\tilde{c} : K^{(E \times F)} \to G$ comme étant l'application linéaire qui envoie l'élément de base $(e, f)$ sur $b(e, f)$. Cette application linéaire $\tilde{c}$ est nulle sur le sous-espace vectoriel $R(E, F)$ et définit donc par passage au quotient une application linéaire $c : K^{(E \times F)}/R(E, F) \to G$ telle que $b = c \circ j$. L'unicité d'un tel $c$ est evident. Ce qui montre que le couple $(K^{(E \times F)}/R(E, F), j)$ satisfait i).

■

Pour résumer, l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$, s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes F$ dans $G$

$$\begin{array}{ccc} \beta(E, F\,; G) & \simeq & \mathcal{L}(E \otimes F\ ;\ G) \\ b & \longleftrightarrow & c \end{array}$$

et cette propriété caractérise $E \otimes F$.

**Exemple** : soit $b : E \times k \to G$ une application bilinéaire quelconque et soit $j : E \times k \to E$ l'application bilinéaire définie par $j(V, \lambda) = \lambda V \ \lambda \in k, V \in E$

$$\begin{tikzcd} E \times k \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "b"] & \\ E \arrow[r, "c"] & G \end{tikzcd}$$

et soit $c : E \to G$ l'application linéaire définie par $c(V) = b(V, 1)$. La commutativité du diagramme ci-dessus montre que le couple $(E, j)$ répond à la question. On a donc $E \otimes k \overset{I}{\simeq} E$ où $I$ est l'application linéaire induite par l'application bilinéaire $j$.

**I-2** Notations :

l'élément de $E \otimes F$, $j(e, f)$ se note $e \otimes f$ et se lit $e$ tenseur $f$.

**I-3** Propriétés évidentes du produit tensoriel

1) Commutativité

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F & \xrightarrow{\sim} & F \otimes E \\ e \otimes f & \longmapsto & f \otimes e \end{array}$$

2) Associativité $(E \otimes F) \otimes G \xrightarrow{\sim} E \otimes (F \otimes G)$.

3) Pour $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ et $e, e' \in E$, $f, f' \in F$ on a les règles de calcul

$$(\lambda e + \lambda' e') \otimes (\mu f + \mu' f') = \lambda\mu(e \otimes f) + \lambda\mu'(e \otimes f') + \lambda'\mu(e' \otimes f) + \lambda'\mu'(e' \otimes f') \in E \otimes F$$

4) Les éléments de $E \otimes F$ de la forme $e \otimes f$ s'appellent des tenseurs élémentaires. Ils engendrent $E \otimes F$.

**Preuve** : application directe de la définition de $E \otimes F$.

**I-4** Commutation du produit tensoriel et des sommes directes.

**Propriété I-4** Soient $E_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels et $F$ un espace vectoriel.

Les deux espaces vectoriels $(\bigoplus_{i \in I} E_i) \otimes F$ et $\bigoplus_{i \in I} (E_i \otimes F)$ sont canoniquement isomorphes.

**Preuve** : pour tout espace vectoriel $G$ on a la suite d'isomorphismes

$$\beta((\bigoplus_{i \in I} E_i), F \ ; \ G) \simeq \prod_{i \in I} \beta(E_i, F \ ; G)$$

$$\simeq \prod_{i\in I} \mathcal{L}(E_i \otimes F\ ;\ G) = \mathcal{L}(\bigoplus_{i\in I}(E_i \otimes F)\ ;\ G)$$

et par définition

$$\beta(\bigoplus_{i\in I} E_i, F\ ;\ G) = \mathcal{L}((\bigoplus_{i\in I} E_i) \otimes F\ ;\ G)\ .$$

■

**Corollaire I-4.1** si $e_i$ $i \in I$ est une base de $E$, et $f_j$ $j \in J$ une base de $F$, les éléments $e_i \otimes f_j (i,j) \in I \times J$ forment une base de $E \otimes F$.

**Preuve** : On a $E \simeq \bigoplus_{i\in I} ke_i$ et $F \simeq \bigoplus_{j\in J} kf_j$ et donc

$$E \otimes F \simeq \bigoplus_{i,j\in I\times J}(ke_i \otimes ke_j) = \bigoplus_{i,j\in I\times J} k(e_i \otimes f_j)$$

■

En particulier si dim $E$ et dim $F$ sont finies, $E \otimes F$ est aussi de dimension finie et dim $(E \otimes F) =$ dim $E\times$ dim $F$.

**I-5** Produit tensoriel d'applications linéaires.

Soient $E$, $F$, $E'$, $F'$ quatre espaces vectoriels sur $k$ et $f : E \to F$, $f' : E' \to F'$ deux applications linéaires.

Il existe une seule application linéaire, notée $f\otimes f' : E\otimes E' \to F\otimes F'$ caractérisée par la formule $f \otimes f'(e \otimes e') = f(e) \otimes f'(e')$.

**Exercice**

a) L'application $b : E^* \times F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)$ définie par $b(\varphi, f)(e) = \varphi(e) \cdot f$ où $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$, $f \in F$ et $e \in E$ est une application bilinéaire de $E^* \times F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)$.

b) Elle induit donc une application linéaire

$$c\ :\ E^* \otimes F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)\ .$$

Montrer que $c$ est injective et que son image est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E\ ;\ F)$ constitué des applications linéaires $\ell : E \to F$ telles que la dimension de $\ell(E)$ soit finie.

c) En conclure que si dim $E$ est finie, ou si dim $F$ est finie on a un isomorphisme $E^* \otimes F \stackrel{c}{\simeq} \mathcal{L}(E\ ;\ F)$.

**I-3** Algèbre tensorielle.

On pose $T^0(E) = k$, $T^1(E) = E$ et pour $p > 1$ $T^p(E) = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p-\text{fois}}$.

**Définition I-3.1** On appelle algèbre tensorielle de $E$ que l'on note $T^*(E) = \underset{p\geq 0}{\otimes} T^p(E)$.

Le produit évident $T^p(E) \times T^q(E) \to T^{p+q}(E)$ qui associe à $x_1 \otimes x_2, \otimes \cdots x_p$, et $y_1 \otimes y_2 \cdots y_q \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots x_p \otimes y_1 \otimes y_2 \cdots \otimes y_q$ en fait une algèbre (non commutative).

(Se rappeler que $k \otimes E = E$).

## II - ALGÈBRE EXTÉRIEURE

### Définition II-1

On note $\Lambda^p E$ le quotient de $T^p(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_p$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On appelle $\Lambda^p E$ la puissance extérieure $p$-ième de $E$.

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_p$. Cet élément se lit $x_1$ extérieur $x_2$ extérieur $x_3$ extérieur $\cdots$ $x_p$.

On note $\Lambda^*(E) = \underset{p\geq 0}{\oplus} \Lambda^p E = k \oplus E \oplus \Lambda^2 E \oplus \cdots$.

Le produit $T^p(E) \times T^q(E) \to T^{p+q}(E)$ passe évidemment au quotient et induit un produit dit "produit extérieur" $\wedge : \Lambda^p E \times \Lambda^q E \to \Lambda^{p+q} E$.

### Remarque II-2

La puissance extérieure $\Lambda^p E$ est définissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

On appelle forme $p$-linéaire alternée sur $E$, à valeur dans $F$ une application $p$-linéaire $E^p \to F$, nulle chaque fois que deux vecteurs sont égaux.

On voit alors que $\Lambda^p E$ jouit des propriétés suivantes qui la caractérise. (Exercice).

Pour toute application $p$-linéaire alternée $\rho : E^p \to F$. Il existe une unique application linéaire $f : \Lambda^p E \to F$ telle que

$$\begin{tikzcd} E^p \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \Lambda^p E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd} \qquad \rho = f \circ c$$

où $c$ est l'application $p$-linéaire alternée définie par $c(x_1, \cdots, x_p) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$.

### Proposition II-3

Soient $X \in \Lambda^p E$ et $Y \in \Lambda^q E$. On a

$$X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \in \Lambda^{p+q}(E) .$$

**Preuve** : puisque les éléments de la forme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ et $y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$ engendrent respectivement $\Lambda^p(E)$ et $\Lambda^q(E)$ il suffit de montrer la formule pour ceux-ci.

En fait dans $\Lambda^2(E)$ on a $x \wedge y = -y \wedge x$ puisque

$$\begin{aligned}(x+y)\wedge(x+y) = 0 &= x\wedge x + y\wedge y + x\wedge y + y\wedge x \\ &= 0 + 0 + x\wedge y + y \wedge x\ .\end{aligned}$$

La formule en découle.

■

**Corollaire II-4**

Si dim $E = n$. Soit $e_1 \cdots e_n$ une base de $E$. Les $C_n^p$ éléments $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots e_{i_p}$ où $i_1 < i_2 < i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p E$. En particulier la dimension de $\Lambda^p E$ est $C_n^p$.

**II-5**

Le produit extérieure $\Lambda$ : $\Lambda^* E \times \Lambda^* E \to \Lambda^* E$ fait de $\Lambda^* E$ une algèbre. On exprime la proposition II-3 en disant que c'est une algèbre commutative au sens gradué.

**II-6 Dualité**

Dorénavant on suppose $E$ de dimension finie.

**Théorème II-6**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie alors on a $\Lambda^p(E^*) = (\Lambda^p E)^*$.

**Démonstration** : remarquons d'abord que $(\Lambda^p E)^*$ est exactement l'espace vectoriel des $p$-formes alternées sur $E$.

Soit maintenant $f_1 \cdots f_p \in (E^*)^p$ $p$-formes linéaires sur $E$ et considérons l'application $p$-linéaire alternée $\varphi$ sur $E$ qui associe à $X_1 \cdots X_p \in E$ le déterminant de la matrice $p \times p$ $(a_{i,j})$ ou $a_{i,j} = f_i(X_j)$.

La correspondance $(f_1 \cdots f_p) \mapsto \varphi$ est une application $p$-linéaire alternée de $(E^*)^p$ dans $(\Lambda^p E)^*$ et fournit donc (remarque II-2) une application linéaire

$$i_p \ : \ \Lambda^p(E^*) \to (\Lambda^p E)^*\ .$$

**Exercice**

Montrer que $i_p$ est bien un isomorphisme.

**II-7 Produit extérieur d'une forme $p$-linéaire alternée, par une forme $q$-linéaire alternée.**

On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\Lambda & : & \Lambda^p(E^*)\times & \Lambda^q(E^*) & \to & \Lambda^{p+q}(E^*) \\
 & & \Big\downarrow i_p & \Big\downarrow i_q & & \Big\downarrow i_{p+q} \\
\Lambda & : & (\Lambda^p(E))^*\times & (\Lambda^q(E))^* & \to & (\Lambda^{p+q}(E))^*
\end{array}$$

ou par définition on pose

$$\varphi \wedge \psi = i_{p+q}(i_p^{-1}(\varphi) \wedge (i_q^{-1}(\psi))$$

1) Soit $u \in E^* = \Lambda^1(E^*) = (\Lambda^1(E))^*$ une forme linéaire sur $E$ et $\varphi \in (\Lambda^p E)^*$ une forme $p$-linéaire alternée.

Montrer la formule

$$u \wedge \varphi(X_1 \cdots X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-i)^i u(X_i)\varphi(X_1 \cdots \widehat{X}_i \cdots X_p)$$

où la notation $\widehat{X}_i$ signifie que l'on a éffacé $X_i$.

2) Donner la formule générale pour $\varphi \wedge \psi$.

Dorénavant on identifie $\Lambda^p(E^*)$ avec $(\Lambda^p E)^*$.

En particulier on pourra penser a l'élément $f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_p \in \Lambda^p(E^*)$ où $f_i \in E^* = \Lambda^1 E^*$ comme à la forme $p$-linéaire alternée sur $E$ qui associe à $X_1 \cdots X_p$ le déterminant de la matrice

$$A = (a_{i,j}) \text{ ou } a_{i,j} = f_i(X_j) \ .$$

**II-8**

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Elle induit une application $\Lambda^p u : \Lambda^p E \to \Lambda^p F$ caractérisée par la formule $\Lambda^p u(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge u(x_2) \cdots \wedge (x_p)$.

**II-8.1 Image réciproque d'une forme $p$-linéaire alternée par une application linéaire.**

Soient $u : E \to F$ une application linéaire et $u^* : F^* \to E^*$ l'application duale.

On a donc (II.8.1) l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc}
\Lambda^p(u^*) \ : & \Lambda^p(F^*) & \to & \Lambda^p(E^*) \\
 & \wr| & & \wr| \\
 & (\Lambda^p(F))^* & \to & (\Lambda^p(E))^*
\end{array}$$

qui associe donc à une forme $p$-linéaire alternée sur $F$, $\varphi$ une forme $p$-linéaire alternée sur $E$, (attention au changement de sens) que l'on note $u^*(\varphi)$.

**Exercice**

Montrer que pour $X_1 \cdots X_p \in E$ on a

$$u^*(\varphi)(X_1 \cdots X_p) = \varphi(u(X_1) \cdots u(X_p)) \ .$$

et

$$u^*(\varphi \wedge \psi) = u^*(\varphi) \wedge u^*(\psi) \ .$$