Topologie différentielle
– Feuille 9 –

1. Soient M et N deux variétés différentiables connexes de dimension $n \geq 1$ et $f : M \to N$ un revêtement galoisien dont le groupe d'automorphismes $\mathcal{T}$ est fini. On note

$$\Omega^k_{\mathcal{T}}(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid T^*\omega = \omega,\ \forall T \in \mathcal{T}\}$$

et

$$H^k_{\mathcal{T}}(M) = \{x \in H^k(M) \mid T^*x = x,\ \forall T \in \mathcal{T}\}$$

On rappelle (Ex. 4, Feuille 3) que f^* induit un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*_{\mathcal{T}}(M)$ et que $H^k(N)$ est isomorphe au k-ème groupe de cohomologie du complexe $\Omega^*_{\mathcal{T}}(M)$.
a) Montrer que $H^k(N)$ est isomorphe à $H^k_{\mathcal{T}}(M)$.
b) Calculer la cohomologie de l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

2. a) Soit x un générateur de $H^n(S^n)$ et p_1, p_2 les projections canoniques de $S^n \times S^n$ sur S^n. Montrer, en utilisant la formule de Künneth, que $H^n(S^n \times S^n)$ est engendré par $x_1 := p_1^*(x)$ et $x_2 := p_2^*(x)$ et que $x_1 \wedge x_2 \neq 0$.
b) Supposons qu'il existe $e \in S^n$ et $f : S^n \times S^n \to S^n$ telle que $f(e, p) = f(p, e) = p$ quel que soit $p \in S^n$. Montrer que n est impair.

3. Montrer, en utilisant la formule de Künneth, que la caractéristique d'Euler, définie par

$$\chi(M) := \sum_{p=0}^{\dim(M)} (-1)^p \dim(H^p(M)),$$

pour toute variété différentiable M de type fini, est multiplicative, dans le sens que si M et N sont des variétés différentiables de type fini, alors

$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N).$$

4. Soit M une variété compacte, orientée, de dimension impaire. Montrer que sa caractéristique d'Euler est nulle.

5. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{n+1}$ une application linéaire injective et $g : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ le plongement induit par f. On note par α_1 l'unique élément de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ satisfaisant

$$\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} \alpha_1 = 1$$

et par α_n l'unique élément de $H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ satisfaisant $g^*(\alpha_n) = \alpha_1$. On se propose de montrer la formule

$$\int_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} (\alpha_n)^n = 1. \tag{$*$}$$

a) Considérer l'application $F : (\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$

$$F([x_1 : y_1], \ldots, [x_n : y_n]) = [z_0 : \ldots : z_n],$$

où z_k sont définis par

$$\prod_{i=1}^{n} (t x_i + y_i) = \sum_{k=0}^{n} z_k t^k,$$

ou, de façon équivalente,

$$z_k = \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} x_{\sigma_1} \ldots x_{\sigma_k} y_{\sigma_{k+1}} \ldots y_{\sigma_n}.$$

Montrer que F est bien définie et que le degré de F est égal à $n!$.
b) Montrer que $i_k^*(F^*(\alpha_n)) = \alpha_1$, où i_k désigne l'inclusion de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ dans $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^n$ définie par

$$i_k(x) := (p, \ldots, p, x, p, \ldots, p),$$

où x se trouve en k-ème position, et $p := [0 : 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$.
c) On note à présent p_k la k-ème projection de $(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^n$ sur $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. En utilisant la formule de Künneth, montrer que

$$F^*(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k^*(\alpha_1).$$

d) Montrer la relation (*) et en déduire que l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est isomorphe à $\mathbb{R}[X]/X^{n+1}$.