Mathématiques - MAT 553 PC du 9 novembre 2015

Topologie différentielle
– Feuille 8 –

1. Montrer que l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

2. a) Montrer que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{x\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$.
b) En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris et une récurrence sur n, montrer que

$$H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 2p,\ 0 \leq p \leq n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) Soit $i : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'inclusion définie par

$$i([x_0 : \ldots : x_{n-1}]) = [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0].$$

Montrer que $i^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ est un isomorphisme.

3. Montrer que l'ensemble $V_{n,p}(\mathbb{R})$ des p-uplets orthonormés de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de classe C^∞ de $(\mathbb{R}^n)^p$. Trouver sa dimension.

4. On note X_r l'ensemble des matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r.
a) Soit A une matrice carrée d'ordre r inversible. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

appartient à X_r si et seulement si $D = CA^{-1}B$. *Indication:* On cherchera une matrice inversible $P \in M_m(\mathbb{R})$ telle que

$$PM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que X_r est une sous-variété différentiable de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.