Topologie différentielle
– Feuille 7 –

1. Soit $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ une application C^∞ et soit $y \in \mathbb{R}^k$ une valeur régulière de F. On note $M := F^{-1}(y)$ et $i : M \to \mathbb{R}^N$ l'inclusion canonique. Pour chaque $x \in M$, montrer que $di_x(T_xM) = \ker(dF_x)$.

2. Soit M une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in M$ la demi-droite (fermée) issue de 0 et passant par x est contenue dans M. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que le fibré tangent d'une variété de dimension n admet une structure différentiable telle que la projection canonique $TM \to M$ soit C^∞.

4. On définit l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ comme le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action multiplicative de $\mathbb{R}^*$. De même, on définit l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ comme le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action multiplicative de $\mathbb{C}^*$.
a) Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ admet une structure de variété différentiable de dimension n.
b) Montrer que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ admet une structure de variété différentiable de dimension $2n$.
c) Montrer les difféomorphismes suivants:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1, \qquad \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2.$$

5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, yz, zx).$$

a) Montrer que la restriction de f à S^2 définit par passage au quotient une application continue g injective de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ sur $M := f(S^2)$.
b) Montrer que si $z \in S^2$, alors la différentielle de f en z est injective sur l'espace tangent à S^2 en z. En déduire que M est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^4$ et que g est un difféomorphisme entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ et M.