Topologie différentielle
– Feuille 6 –

1. Dans cet exercice on suppose que M est une variété différentiable de dimension n dont les groupes de cohomologie sont de dimension finie.
a) La *caractéristique d'Euler-Poincaré* de M se définit par

$$\chi(M) := \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim(H^p(M)).$$

En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris pour deux ouverts bien choisis, montrer que pour tout $x \in M$ on a la relation

$$\chi(M) = \chi(M \setminus \{x\}) + (-1)^n.$$

b) En déduire que si M est connexe et Z_1 et Z_2 sont deux parties finies de M, alors $M \setminus Z_1$ et $M \setminus Z_2$ sont difféomorphes si et seulement si Z_1 et Z_2 ont le même cardinal.

2. *Le degré d'une application propre.* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application propre (l'image inverse d'un compact est un compact). Comme $H^n_c(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$, il existe un nombre réel $deg(f)$ appelé le *degré* de f tel que $f^*(x) = deg(f)x$ pour tous $x \in H^n_c(\mathbb{R}^n)$.
a) Montrer que si f n'est pas surjective, $deg(f) = 0$. (On pourra utiliser le fait que l'image d'une application propre est fermée).
b) Un point $y \in \mathbb{R}^n$ s'appelle *valeur régulière* de f si df_x est un isomorphisme quel que soit $x \in f^{-1}(y)$. Montrer que si y est une valeur régulière, alors

$$deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(\det(df_x)).$$

3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est propre et calculer son degré.

4. Soit J l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ correspondant à la multiplication par i via l'isomorphisme canonique $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Une application $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ s'appelle *holomorphe* si $df_x \circ J = J \circ df_x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que le degré d'une application holomorphe propre est toujours positif ou nul.