Topologie différentielle
– Feuille 5 –

1. a) Soient x_0 et x_1 deux points de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x_0) = x_1$ et $\varphi(x) = x$ quel que soit x avec $\|x\| \geq R$.
b) Soit M une variété différentiable connexe et x_0 et x_1 deux points de M. Montrer que $M \setminus \{x_0\}$ et $M \setminus \{x_1\}$ sont difféomorphes.
c) Soient Z_1 et Z_2 deux parties finies de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus Z_1$ et $\mathbb{R}^2 \setminus Z_2$ sont difféomorphes si et seulement si Z_1 et Z_2 ont même cardinal.

2. a) Calculer $H^1_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Indication: Tout élément de $H^1_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ est représenté par une 1-forme fermée α à support compact. On étend α par 0 en 0 et on obtient une 1-forme fermée $\tilde{\alpha}$ sur $\mathbb{R}^2$. D'après le lemme de Poincaré, $\tilde{\alpha} = df$, et $f = c_1$ autour de 0, $f = c_2$ à l'infini. On définit alors $\phi([\alpha]) = c_2 - c_1$ et on vérifie que c'est un isomorphisme de $H^1_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ sur $\mathbb{R}$.
b) On considère les demi-droites $D_1 = \{(x, 0), x \leq 0\}$ et $D_2 = \{(x, 0), x \geq 0\}$ ainsi que les parties ouvertes de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus D_1, \qquad U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus D_2.$$

En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée aux ouverts U_1 et U_2, calculer le groupe de cohomologie à support compact $H^2_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

3. Soit $n \geq 3$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En utilisant l'isomorphisme du cours entre $H^k_c(U \times \mathbb{R})$ et $H^{k-1}_c(U)$, calculer la cohomologie à support compact de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Indication pour montrer que $H^{n-1}_c(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, utiliser une méthode similaire à celle de l'exercice précédent.

4. a) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $s^*(x) = -x$ quel que soit $x \in H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.
b) Soit à présent s la symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que $s^*(x) = -x$ quel que soit $x \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

5. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une n-forme ω à support compact contenu dans U, dont la classe de cohomologie dans $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ est non-nulle.