Mathématiques - MAT 553 PC du 5 octobre 2015

Topologie différentielle
– Feuille 4 –

1. Considérons l'application

$$f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad f(r,t) = (r\cos t, r\sin t).$$

a) Montrer que f est un revêtement.
b) Montrer que le groupe des automorphismes de f est engendré par la translation $T(r,t) = (r, t+2\pi)$ et en déduire que f est galoisien.

2. a) Donner un exemple explicite d'application non identiquement nulle $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[1, +\infty[$.
b) Donner un exemple explicite d'application $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui vaut 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, +\infty[$.
c) On considère $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, avec $x_1 < x_2 \ldots < x_n$. Trouver une application $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact telle que $\mu(x_i) = y_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3. a) Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $g(x+1) - g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) En utilisant les exercices précédents et le Lemme de Poincaré, calculer la cohomologie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4. On considère les applications

$$r : \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \mapsto (x,y)$$

et

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}), \qquad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que chacune des applications $r \circ i$ et $i \circ r$ est différentiablement homotope à l'identité.
b) En déduire la cohomologie de de Rham de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$, puis de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
c) Pourquoi $\omega_1 - \omega_3$ est-elle exacte, où

$$\omega_1 = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

et

$$\omega_3 = \frac{z}{x^2 + z^2} dx - \frac{x}{x^2 + z^2} dz.$$

5. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, montrer que

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des points distincts du plan. Calculer la cohomologie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$.

7. On appelle X la réunion des trois axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la cohomologie de $\mathbb{R}^3 \setminus X$.