Topologie différentielle
– Feuille 3 –

1. Montrer que le produit extérieur des formes différentielles induit un produit en cohomologie.

2. On considère le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, vu comme une partie ouverte de $\mathbb{R}^{n^2}$.
a) Combien a-t-il de composantes connexes?
b) On écrit toute matrice M de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}.$$

Montrer que la forme

$$\frac{tdx - ydz - zdy + xdt}{xt - yz}$$

est exacte.
c) Montrer que les deux formes

$$\omega_1 = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

et

$$\omega_2 = -\frac{t}{z^2 + t^2} dz + \frac{z}{z^2 + t^2} dt$$

sont fermées et ne sont pas exactes, mais que la forme $\omega_1 - \omega_2$ est exacte sur $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. *Indication:* On commencera par une interprétation géométrique avant de donner une primitive explicite de $\omega_1 - \omega_2$.

3. Soit $f : U \to V$ une application de classe C^∞ entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$.
a) Montrer que si f est surjective et si df_x est surjective en tout point x de U, alors l'application $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ est injective.
b) La réciproque est-elle vraie?

4. On appelle revêtement (de classe C^∞) toute application surjective $f : U \to V$ de classe C^∞ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie la propriété suivante:
(P) Il existe un ensemble I tel que pour tout $y \in V$, il existe un voisinage ouvert W de y dans V et une famille non vide $(U_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes disjointes de U telles que la restriction de f à chaque U_i est un difféomorphisme entre U_i et W.
Un difféomorphisme T de U vérifiant $f \circ T = f$ est appelé un *automorphisme* de f. Le revêtement s'appelle *galoisien* si pour tous $x \in U$ et $y \in U$ tels que $f(x) = f(y)$, il existe un automorphisme de f envoyant x sur y.
On note $\mathcal{T}$ le groupe des automorphismes de f et on définit

$$\Omega^k_{\mathcal{T}}(U) = \{\omega \in \Omega^k(U) \mid T^*\omega = \omega,\ \forall T \in \mathcal{T}\}.$$

a) On suppose U connexe. Montrer que si un automorphisme T de f fixe un point, alors T est l'identité. En déduire que l'action du groupe $\mathcal{T}$ sur chaque fibre $f^{-1}(x)$ est libre (et transitive si f est galoisien).
b) Montrer que $\Omega^*_{\mathcal{T}}(U) := \bigoplus_{k\geq 0} \Omega^k_{\mathcal{T}}(U)$ est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(U)$.
c) Montrer que si f est galoisien, alors f^* définit un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\Omega^*(V)$ et $\Omega^*_{\mathcal{T}}(U)$.
d) En déduire que $H^k(V)$ est isomorphe au k-ème groupe de cohomologie du complexe $\Omega^*_{\mathcal{T}}(U)$.

5. Considérons l'application

$$f :]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad f(r,t) = (r\cos t, r\sin t).$$

a) Montrer que f est un revêtement.
b) Montrer que le groupe des automorphismes de f est engendré par la translation $T(r,t) = (r, t+2\pi)$ et en déduire que f est galoisien.