Topologie différentielle
– Feuille 2 –

1. a) Montrer que tout élément $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ est décomposable (c'est-à-dire il existe $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha = u \wedge v$).
b) Montrer qu'un élément $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ est décomposable si et seulement si $\alpha \wedge \alpha = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞. Montrer la relation

$$f^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = J(f) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

où $J(f)$ désigne le jacobien de f.

3. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.
a) Trouver toutes les fonctions lisses $f : U \to \mathbb{R}$ telles que $df = 0$.
b) Si $\omega \in \Omega^1(U)$ est une forme exacte, trouver l'espace des fonctions f telles que $df = \omega$.

4. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbb{R}^3$. Calculer les différentielles des formes extérieures suivantes:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3, \\ \omega_2 &= f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

5. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On pose $R_\theta : U \to U$ la rotation d'angle θ et $f : U \to U$ l'application $f(z) = z^2$. Calculer $R_\theta^*(\omega)$ et $f^*(\omega)$ dans chacun des cas suivants:

$$\begin{aligned} \omega &= dx, \\ \omega &= dy, \\ \omega &= dx \wedge dy, \\ \omega &= -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy. \end{aligned}$$

6. On considère l'application $f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Exprimer les images par f^* des formes

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= dx, \\
\omega_2 &= dy, \\
\omega_3 &= dx \wedge dy, \\
\omega_4 &= -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.
\end{aligned}$$

7. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega^1(U)$ une 1-forme sur U. Si $\gamma : [a, b] \to U$ est un chemin paramétré de U, on définit l'intégrale de ω le long de γ par

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega).$$

a) Montrer que l'intégrale ne dépend pas du paramétrage: si $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ est une application C^1 telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ et $\varphi'(t) > 0$ quel que soit $t \in]c, d[$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ \varphi} \omega.$$

b) Montrer que si ω est une 1-forme exacte et γ une courbe fermée, alors $\int_\gamma \omega = 0$.
c) Montrer que la 1-forme ω sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

est fermée mais n'est pas exacte.